









Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1917

München 1917
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.

II. Abhandlungen.

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse
der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
1917.

Sitzung am 13. Januar.

1. Freiherr E. Stromer von Reichenbach berichtet über die

Ergebnisse der Forschungsreisen Prof. E. Stromers in den Wüsten Ägyptens. II. Wirbeltier-Reste der Baharîje-Stufe (unterstes Cenoman). 4. Die Säge des Pristiden Onchopristis numidus Haug sp. und über die Sägen der Sägehaie.

Zahlreiche, isolierte Zähne von sehr verschiedener Größe und etwas wechselnder, eigenartiger Form sowie zwei verkalkte Knorpelrostren werden genau beschrieben und abgebildet. Es wird festgestellt, daß sie zusammengehören und daß es sich um Rostren von Sägehaien handelt, die auf seitlichen Narben schlanke Zähne trugen, welche mit Widerhaken versehen sind und aus Dentin und Schmelz mit einem Sockel aus wirrem Trabekulardentin bestehen.

Vergleiche ergeben, daß ähnliche Zähne vereinzelt schon aus der mittleren und oberen Kreide Nordafrikas und aus der oberen Kreide Frankreichs bekannt sind, daß sie aber für Rachenzähne von Reptilien oder Knochenfischen gehalten wurden. Strukturunterschiede nötigen, für die vorliegende, geologisch älteste Form eine neue Gattung, Onchopristis, aufzustellen,

während die oberkretazische nach den Prioritätsregeln Onchosaurus genannt werden muß.

Eine vergleichende Übersicht über rezente und fossile Sägen von Pristidae und Pristiophoridae ergibt, daß sich beide Familien näher stehen, als man neuerdings annahm, und daß die Sägezähne der genannten zwei ältesten Gattungen, die zu den Pristidae gestellt werden, in ihrem Bau zwischen denjenigen beider Familien vermitteln.

Es lassen sich Reihen nach der Höhe der Ausbildung der Rostren und ihrer Zähne aufstellen, die neben Betrachtungen über deren Zweck Vermutungen über die stammesgeschichtliche Entwicklung der Sägen der Sägehaie erlauben. Vergleichbare große Widerhaken-Zähne sind nämlich an den Kopfseiten männlicher Hybodontidae aus dem mittleren Mesozoikum nachgewiesen und wurden als Klammer- oder Reizorgane für die Begattung aufgefaßt. Entsprechende Gebilde könnten den Ausgangspunkt der Entwicklung auch hier gegeben haben, die dann zur Senkrechtstellung und Rückbildung der Zahnkronen, zur Erhöhung der Zahnwurzeln und zuletzt zur Ausbildung ständig nachwachsender Sägezähne der tertiären und heutigen Pristidae führte, während gleichzeitig die Befestigung der Sägezähne am verkalkten und komplizierter gebauten Rostrum eine bessere wurde.

Bei diesen jüngeren Pristidae ist eine starke Abnutzung der Sägezähne durch den Gebrauch festgestellt. Er wird im Nahrungserwerb, Töten von Fischen durch Aufschlitzen des Bauches, vermutet. Die Ursache der Umänderung der Sägezähne kann in funktioneller Anpassung gesucht werden, die bei den basalen Teilen, welche aus Trabekulardentin bestehen, möglich ist, während bei schmelzbedeckten Zahnkronen eine solche kaum in Betracht kommt, da ihre Umbildung durch den Gebrauch unmöglich ist und nur eine Abnützung stattfindet.

(Erscheint in den Abhandlungen.)

2. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Abhandlung von Professor H. Mohrmann in Klaustal:

Die Minimalzahl der stationären Ebenen eines räumlichen Ovals.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr A. Föppl spricht:

Über den elastischen Verdrehungswinkel eines Stabs.

Für Stäbe von kreisförmigem, elliptischem, rechteckigem Querschnitt und für eine Reihe von anderen Fällen kennt man genaue Formeln für den elastischen Verdrehungswinkel. In den übrigen Fällen, wozu namentlich die häufig vorkommenden Walzeisenträger gehören, ist man auf die Benutzung von Näherungsformeln angewiesen. Am meisten gebraucht wird für diesen Zweck eine von de Saint-Venant aufgestellte Näherungsformel, die aber, wie eine nähere Betrachtung erkennen läßt, öfters ganz unzutreffende Werte liefert. Für Walzeisenträger, deren Querschnitte aus einer Vereinigung von mehreren schmalen Rechtecken bestehen, wird eine andere Näherungsformel aufgestellt, die viel besser zutrifft und zwar um so genauer, je kleiner die Schmalseite der Rechtecke gegenüber der Langseite ist. Anhangsweise wird für Stäbe von diesem Querschnitt auch noch eine Formel für die durch ein Verdrehungsmoment hervorgebrachte größte Schubspannung aufgestellt.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 3. Februar.

1. Herr Rothpletz spricht

Über die Rückzugserscheinungen in der Moränenlandschaft der Isarvorland-Gletscher.

2. Herr Alfred Pringsheim legt vor eine Mitteilung des Herrn Leopold Fejér (Budapest):

Über Potenzreihen, die in ihrem abgeschlossenen Konvergenzkreise überall stetig sind.

Der Verfasser hat in einer früheren Arbeit, die im Jahrgange 1910 dieser Berichte erschienen ist, durch Konstruktion eines Beispiels die damals noch offene Frage entschieden, ob eine Potenzreihe, die auf ihrem Konvergenzkreise nur bedingt konvergiert, trotz vollkommener Stetigkeit der Randfunktion „Du Bois-Reymondsche Singularitäten", d. h. Divergenzstellen besitzen kann. In der vorliegenden Mitteilung zeigt er durch passende Modifikation seiner Konstruktionsmethode, daß eine Potenzreihe unter den gleichen Voraussetzungen auf ihrem Konvergenzkreise auch „Lebesguesche Singularitäten", d. h. bei sonst durchweg gleichmäßiger Konvergenz Stellen ungleichmäßiger Konvergenz haben kann, und stellt zugleich fest, daß dabei für die konjugierten trigonometrischen Reihen, welche den reellen und imaginären Teil der Potenzreihe bilden, jede von drei überhaupt vorhandenen Möglichkeiten auch wirklich eintreten kann. Durch weitere Verallgemeinerung seiner Methode gelangte er u. a. auch zur Herstellung einer Potenzreihe, die bei nur bedingter Konvergenz dennoch auf dem Konvergenzkreise ausnahmslos gleichmäßig konvergiert (eine Möglichkeit, deren reale Existenz schon früher von den Herren G. H. Hardy und Marcel Riesz durch Beispiele erwiesen wurde). (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 3. März.

1. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Abhandlung von Professor Dr. Hans Beck in Charlottenburg:

Die beiden Geraden-Kugeltransformationen von Sophus Lie. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr P. v. Groth legte eine Mitteilung vor von A. Johnsen in Kiel über:

Kohäsion, Leitvermögen und Krystallstruktur.

Darin wird gezeigt, daß die Erklärung, welche Stark für die Spaltbarkeit und die Gleitung der Steinsalzkrystalle gegeben hat, sich bei allen bisher strukturell untersuchten Krystallarten, welche ionisiert gedacht werden können, bestätigte. In den Gleitrichtungen sind Maxima des elektrolytischen Leitvermögens zu erwarten, und in der Tat liegen diese Maxima beim Eisenglanz und Kalkspat in den Gleitebenen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr A. Sommerfeld legt eine Abhandlung vor:

Zur Quantentheorie der Spektrallinien, Intensitätsfragen.

Im Anschluß an vorhergehende, der Akademie vorgelegte Arbeiten sucht der Vortragende auf Grund der vorliegenden Beobachtungen die Frage zu entscheiden, ob die Verteilung der Intensität auf die Komponenten einer spektralen Feinstruktur durch Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen erklärt werden kann, oder ob hierbei dynamische Wechselbeziehungen zwischen Anfangs- und Endbahn mitwirken.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

*

4. Herr S. Günther spricht über das Thema:

Ethnologisch-Mathematisches.

In der Ethnologie stehen sich zwei Prinzipien gegenüber: Völkergedanke (Bastian) und Übertragungstheorie (Ratzel). Zu gunsten des erstgenannten spricht der Umstand, daß in neuester Zeit für das Auftreten der Null und des Stellenwertes zwei räumlich außerordentlich weit entfernte Entstehungsgebiete nachgewiesen werden konnten: Hindostan und Yukatán. Diese Tatsache führt einen überzeugenden arithmetischen Nachweis für die — allerdings nur relative — Richtigkeit der von Bastian aufgestellten Lehre. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 5. Mai.

1. Herr A. Sommerfeld legt vor eine kurze Abhandlung von Dr. Kossel:

Gesetzmäßigkeiten im Brechungsvermögen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. In Vertretung des durch Erkrankung verhinderten Mitglieds Prof. A. Rothpletz legt Herr R. v. Hertwig für die Sitzungsberichte eine Arbeit des Konservators der geologischen Staats-Sammlung Prof. Schlosser vor. Diese gibt eine kritische Übersicht über die geologische Verbreitung der Fische.

3. Herr A. Pringsheim legt vor zwei Abhandlungen:

a) A. Voss (München):

Über die Kongruenz-Eigenschaften von aus den natürlichen Zahlen gebildeten Potenzsummen.

b) Oskar Perron (Heidelberg):

Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen großer Zahlen.

Eine von Laplace herrührende Methode zur näherungsweisen Berechnung gewisser Integrale für unbegrenzt wachsende Werte eines Exponenten ist neuerdings von Burkhardt (Jahrgang 1914 der Sitzungsberichte) verbessert worden. Aber auch in dieser Darstellung trägt die Methode mehr nur den Charakter eines heuristischen Prinzips, dem es an einer strengen Begründung und einem ausreichenden Kriterium für den Grad der erreichten Annäherung mangelt. Dem Verfasser der vorliegenden Arbeit ist es gelungen, diese Lücke auszufüllen, indem er zur Berechnung der fraglichen Integrale eine asymptotische Reihe mit vollständig gesetzmäßig gebildeten Koeffizienten herleitet. In einer Reihe von Beispielen zeigt er die Überlegenheit seiner Methode gegenüber den bisherigen Ergebnissen.

(Beide Abhandlungen erscheinen in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 9. Juni.

1. Herr Alfred Pringsheim spricht:

Über die Konvergenz periodischer und gewisser nicht-periodischer Kettenbrüche mit komplexen Gliedern.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz periodischer Kettenbrüche mit komplexen Gliedern sind auf verschiedenen Wegen, aber im wesentlichen gleichlautend von O. Stolz, vom Verfasser und von Herrn Perron in anders gearteter und mit gewissen Vorzügen ausgestatteter Form von Herrn von Pidoll abgeleitet worden. Der Verfasser gibt eine vereinfachte Herleitung dieser neueren Bedingungen, welche zugleich eine vollkommene Einsicht in den inneren Zusammenhang der verschiedenen Bedingungsformen gewährt. — Im übrigen enthält die Arbeit den Beweis eines von Herrn van Vleck herrührenden Konvergenz-Kriteriums für gewisse Kettenbrüche mit komplexen Gliedern, das bisher nur unvollständig oder unter Hinzufügung unnötig einschränkender Voraussetzungen bewiesen wurde. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr S. Finsterwalder legt für die Sitzungsberichte vor eine Abhandlung von Herrn Prof. Liebmann:

Deutung und Konvergenzbeweis für die Methoden zur Lösung der 1. Randwertaufgabe von H. A. Schwarz und von H. Poincaré im linearen Gebiet.

3. Herr R. v. Hertwig spricht:

Über Centrosomen bei Radiolarien.

Derselbe berichtet über einen Teil der Untersuchungen, welche er an den von ihm bei Tenerifa gesammelten Radiolarien angestellt hat. Bei einigen Gattungen gelang es ihm, Centrosomen nachzuweisen, welche durch ihre Beziehungen zu den Achsenfäden der Pseudopodien und ihre Struktur an die gleichnamigen Bildungen der Heliozoen erinnern. Während

aber diese außerhalb des Kerns liegen, finden sich jene inmitten des zentral gelegenen großen Kerns. Während ferner diese wie die Centrosomen vielzelliger Tiere bei der Zellteilung eine große Rolle spielen und daher zumeist als spezifische Teilorganellen der Zelle angesehen werden, scheinen die Centrosomen bei den Radiolarien während der Vermehrung bedeutungslos zu sein. Bei der Schwärmerbildung gehen sie zu Grunde. Zweiteilungen des Tiers aber sind bei den in Rede stehenden Arten nicht beobachtet, sie sind sogar wegen der Beschaffenheit des Skeletts unwahrscheinlich, man kann sogar sagen ausgeschlossen.

Sitzung am 7. Juli.

1. Herr v. Seeliger legt vor eine Abhandlung von Prof. Grossmann in München:

Untersuchungen über die astronomische Refraktion.

Die Klasse beschließt Aufnahme in die Abhandlungen.

2. Herr P. v. Groth bespricht die Entstehung der durch ihre Bergkrystalle und andere Mineralien bekannten sogen. Mineralklüfte der Zentralalpen und legt eine darauf bezügliche Arbeit von J. Koenigsberger über die Minerallagerstätten von Valz-Platz in Graubünden nebst einer geologischen Karte dieses Teiles des Adulamassivs mit Angabe der Mineralfundorte zur Publikation in den Abhandlungen vor.

3. Herr R. Willstätter spricht:

Über Cocain und Atropin.

(Wird später veröffentlicht.)



Sitzung am 13. Oktober.

1. Herr S. Günther spricht über

Kriegsmeteorologie.

(Wird nicht gedruckt.)

2. Herr A. Pringsheim legt vor eine Abhandlung von Prof. G. Faber:

Über das Verhalten analytischer Funktionen an Verzweigungsstellen.

Der Verfasser untersucht, welche Werte gewisse einfache, aber noch recht allgemeine mehrdeutige Funktionen in der Umgebung einer Verzweigungsstelle annehmen, und wie die Art dieser Singularität sich im infinitären Verhalten der Taylor-Koeffizienten äußert, Aufgaben, die bisher fast völlig unbearbeitet geblieben waren, während die entsprechenden Fragen für Pole und wesentlich singuläre Stellen zu einer nahezu unübersehbaren Literatur Anlaß gegeben haben. Die Ergebnisse des Verfassers lassen sich insbesondere auf bekannte elementare Funktionen, z. B. auf Produkte von Potenzen iterierter Logarithmen anwenden.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 3. November.

1. Herr v. Seeliger berichtet über Untersuchungen, welche er über die Größe der Lichtabsorption in unserem Fixsternsystem angestellt hat. Durch vorgelagerte Massen irgend welcher Art wird das von den Fixsternen ausgesandte Licht geschwächt, aber diese Schwächung scheint selbst für die entferntesten Teile des Fixsternsystems nur gering zu sein und im Durchschnitt 30 Prozente kaum zu erreichen. An einzelnen Stellen des Himmels dagegen wirken vorgelagerte Massen viel augenfälliger. So befinden sich in den hellsten Teilen der Milchstraße sternarme, manchmal sogar sternleere unregelmäßige dunkle Flecke, die wohl nur durch vorgelagerte dunkle Massen erklärt werden können, und auch einige Spiralnebel zeigen in deutlichster Weise ähnliche Vorkommnisse an. Der Vortragende hat diese Auffassung schon vor 13 Jahren ausgesprochen, die nunmehr auch von andern Seiten in den Vordergrund gestellt werden. Zum Schluß seines Vortrages führt er Lichtbilder vor, die das erwähnte Tatsachenmaterial bei einigen besonders augenfälligen Objekten erläutert.

(Erscheint später.)

2. Herr P. v. Groth legt eine auf Grund der neu eingerichteten Lagerstätten-Abteilung der hiesigen mineralogischen Sammlung des Staates verfaßte Schrift „Topographische Übersicht der Minerallagerstätten“ vor und bespricht die in jener Sammlung besonders reich vertretenen sogenannten „Pegmatite“, welche durch die pneumatolytische Art ihrer Entstehung und die Mannigfaltigkeit ihrer Mineralführung ein besonderes Interesse erheischen.

Sitzung am 1. Dezember.

1. Vortrag des o. Mitgliedes Seb. Finsterwalder über

Kriegsphotogrammetrie.

Es werden die äußeren Bedingungen der Anwendung der Photogrammetrie für Kriegszwecke erörtert und diejenigen Verfahren besprochen, die ihnen genügen, wobei der Luftphotogrammetrie die entscheidende Rolle zufällt. Von den ursprünglichen, nur auf Verbesserung der vorhandenen Karten abzielenden Methoden ausgehend werden insbesondere jene gewürdigt, die für Neuaufnahmen in Betracht kommen, wie die der Reihenbilder und jene des Zusammenschlusses von Teilbildern eines ebenen Geländes zu einem einheitlichen perspektiven Gesamtbild. Es wird die schädliche Wirkung des üblichen Schlitzverschlusses auf die Richtigkeit der Perspektive von Bildern, die mit bewegter Kamera aufgenommen werden, betont, und auf die Mittel zur Vermeidung derselben hingewiesen.

2. Herr Rückert legt eine Untersuchung von Dr. Stieve vor

Über die Entwicklung des Ovarialeies der Dohle (Colaeus monedula).

In der Arbeit wird gezeigt, daß in normalen, in progressiver Entwicklung befindlichen Follikeln das färbbare Kerngerüst nicht — auch nicht vorübergehend — sich auflöst. Die vielfach beobachtete Zerstörung des Kerngerüstes tritt nur in degenerierenden Follikeln auf.

3. Herr H. Liebmann legt eine Arbeit vor, in der untersucht wird, wann eine Schar von ∞^{2n-k} $(1 \leq k < n)$ Geraden im R_{n+1} die Gesamtheit der charakteristischen Kurven einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung darstellt. Das Ergebnis lautet: Die Geraden müssen die gemein-

samen Tangenten von k Mannigfaltigkeiten n-ter Dimension sein. Hinzuzufügen ist, daß die Treffgeraden von Mannigfaltigkeiten niedrigerer (m-ter) Dimension als Ausartungen solcher Tangentenscharen mit einzubegreifen sind, wobei die Eigenschaft, eine solche Mannigfaltigkeit zu treffen, als (n-m)-fache Berührung zählt. Zu dieser Hauptforderung treten dann noch Nebenbedingungen, deren analytische Fassung vollständig gegeben wird. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr Pringsheim legt für die Sitzungsberichte vor eine Abhandlung von Otto Szász:

Über nicht-negative trigonometrische Polynome.

Die Arbeit enthält Verallgemeinerungen und Verschärfungen gewisser zuerst von Herrn Fejér bewiesener Sätze zur Abschätzung sogenannter trigonometrischer Polynome, d. h. Summen, deren Glieder nach Sinus und Cosinus von ganzen Vielfachen eines reellen Arguments mit komplexen Koeffizienten fortschreiten.

Verzeichnis der im Jahre 1917 eingelaufenen Druckschriften.

Die Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Aachen. Geschichtsverein:
— — Zeitschrift, Bd. 38, 1916.
Aarau. Historische Gesellschaft des Kantons Aargau.
— — Taschenbuch für 1914 und 1916.
Agram. K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv:
— — Vjestnik, Bd. 18, Heft 2—4.
— Kroat. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Glasnik. Bd. 29, No. 1—4.
Amsterdam. K. N. aardrijkskundig Genootschap:
— — Tijdschrift, deel 34, No. 2—6; deel 35, No. 1.
— Wiskundig Genootschap (Société de mathémat.):
— — Nieuw archief, 2. Reeks, deel 12, stuk 2.
— — Wiskundige opgaven, deel 12, stuk 4.
— — Revue des publications mathém., tom. 25, partie 1.
— — Index du Répertoire bibliographique, 3 éd., A. 1916.
Ansbach. Historischer Verein für Mittelfranken:
— — 61. Jahresbericht.
Aschaffenburg. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17.
Augsburg. Historischer Verein:
— — Zeitschrift, 43. Jahrg., 1917.

Bamberg. K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17.
— K. Lehrerbildungsanstalt:
— — 43. Jahresbericht, 1916/17.
— Historischer Verein:
— — Jahresbericht 74, 1916/17.

Basel. Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1917 in 4⁰ und 8⁰.
Bayreuth. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm.
— Historischer Verein:
— — Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken, Bd. 26, Heft 3.
Bergen (Norwegen). Museum:
— — Aarsberetning for 1915/16.
— — Aarbog 1915/16, Heft 2, 3.
— — Sars G. O., Crustacea, vol. VI, No. 11/12.
Bergzabern. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17.
Berlin. K. Preuß. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen { Philos.-histor. Klasse, 1916, 5, 6; 1917, 1—7.
Physikal.-math. Klasse, 1917, 1, 2. }
— — Sitzungsberichte 1916, 41—55; 1917, 1—38.
— — Inscriptiones Graecae, Editio minor, Pars I, fasc. 2.
— — Corpus inscriptionum Latinarum, vol. VIII, Suppl. pars 4.
— Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft:
— — Geschäftsberichte 1916/17.
— Archiv der Mathematik und Physik:
— — Archiv, Bd. 25, Nr. 4; Bd. 26, Nr. 1.
— Bild- und Filmamt (Inlandsdienst):
— — Zerstörte Kunstdenkmäler an der Westfront.
— Deutsche Chemische Gesellschaft:
— — Berichte, 49. Jahrg., Nr. 18; 50. Jahrg., Nr. 2—7, 10—13, 15—17.
— — Mitgliederverzeichnis 1917.
— Deutsche Entomologische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Jahrg. 1916, Nr. 5/6; Jahrg. 1917, Nr. 1/2.
— Deutsche Geologische Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 68, Heft 3, 4; Bd. 69, Heft 1, 2.
— — Monatsberichte 1916, Nr. 4—12.
— Deutsche Physikalische Gesellschaft:
— — Die Fortschritte der Physik, 71. Jahrg., 1915, 1—3.
— — Verhandlungen, Jahrg. 19, Nr. 1—24.
— Kais. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abteilung s. unter Rom):
— — Jahrbuch, Bd. 31, Heft 3/4.
— — Antike Denkmäler, Bd. 3, Heft 4.
— K. Meteorologisches Institut:
— — Veröffentlichungen, Nr. 292—296.

Berlin. Preuß. Geologische Landesanstalt:
— — Jahrbuch, Bd. 35 (1914) I, 2 und 3; Bd. 36 (1915) I, 1 und 2.
— Lehranstalt für die Wissenschaft des Judentums:
— — 35. Bericht.
— Mitteilungen aus den deutschen Schutzgebieten:
— — Mitteilungen, Bd. 29, Heft 4.
— K. Astronomisches Recheninstitut:
— — Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1919.
— — Kleine Planeten 1918.
— Reichskolonialamt:
— — Dr. Rich. Thurwald, Die Heimkehr von Neuguinea (S.-A. aus den Mitteilungen aus den deutschen Schutzgebieten, 1917, Heft 3).
— K. Sternwarte:
— — Veröffentlichungen, Bd. 2, Heft 2.
— Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten:
— — Gartenflora, Jahrg. 1917, Nr. 1—24.
— — Mitgliederverzeichnis 1918, Nr. 1/2.
— Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
— — Forschungen zur brandenburgischen und preußischen Geschichte, Bd. 29, 2. Hälfte; Bd. 30, 1. Hälfte.
— Verein für die Geschichte Berlins:
— — Mitteilungen 1917, Nr. 1—12.
— Zeitschrift für Instrumentenkunde:
— — Zeitschrift 1917, 37. Jahrg., Nr. 1—12.
— Zentralstelle für Balneologie:
— — Veröffentlichungen, Bd. III, Heft 3.
Bern. Allg. Geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz:
— — Jahrbuch, Bd. 42.
— Universitätskanzlei:
— — Schriften der Universität, 1917.
Beuron. Bibliothek der Erzabtei:
— — Wolter, Maurus, Geistliche Übungen der hl. Gertrud, Saarlouis 1914.
— — Gedächtnispredigt 1916.
— — Oer, Ohne Furcht und Tadel, 1916.
— — Oer, Ährenlese, 2. Reihe, 1916.
— — Feuling, Alfred Holder, S.-A. 1916.
— — Oer, Daheim, 1917.
— — Texte und Arbeiten I, 1 und 2.
Bonn. Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande:
— — Bonner Jahrbücher, Heft 123, 1, 2.
— — Bericht der Kommission für Denkmalpflege 1912/13 und 1913/14.

Brasso. Historische Kommission:
— — Quellen zur Geschichte der Stadt Brasso, Beiheft für 1916.

Braunschweig. Archiv der Stadt:
— — Leisewitzens Tagebücher 1.

Budapest. K. Ungarische Akademie der Wissenschaften:
— — Almanach 1914, 1915, 1916, 1917.
— — Commentarius ad Ovidium 1915.
— Statistisches Bureau:
— — Publikationen, Nr. 51.
— Ungarische Ethnographische Gesellschaft:
— — Ethnographia, Jahrg. 27, Heft 6; Jahrg. 28, Heft 1—3.
— Ungarische volkswirtschaftliche Gesellschaft:
— — Közgazdasági Szemle, Bd. 57, Heft 1—6; Bd. 58, Heft 1—5.
— Landesrabbinerschule:
— — Jahresbericht 37—39, 1914—1916.
— Ungarisches Nationalmuseum:
— — Ertesitöje, XVII. Jahrg., 1—4.
— K. Ungarische Geologische Reichsanstalt:
— — Földtani Közlöny, Bd. 45, Heft 1—3; Bd. 46, Heft 1—12.
— — Jahrbuch, Bd. 24, Nr. 1—4.
— — Mitteilungen aus dem Jahrbuch, Bd. 24, 1.
— — Jahresbericht 1915, Nr. 1; 1916, Anhang.
— K. Ungarische Ornithologische Zentrale:
— — Aquila 23, 1916.

Bukarest. Academia Română:
— — Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine 1916/17, No. 1.

Burghausen. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm von Scharold.

Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt:
— — Die Tätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt im Jahre 1916.

Christiania. Videnskabs Selskabet:
— — Forhandlinger, Aar 1915.
— — Skrifter, 1915, I, II.
— — Birkeland, Norwegian Aurora Polaris Expedition 1902—03, 1915.
— — Nyt Magazin for Naturvidenskaberne, Bd. 51 u. 52, je Heft 1—4.
— — Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. 32, 1—4; Bd. 33, 1—4; Bd. 34, 1.
— — Norske Gaardnavne, Bd. 7 und 9.

Chur. Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden:
— — 46. Jahresbericht, 1916.

Chur. Naturforschende Gesellschaft:
— — 56. Jahresbericht, 1914/15 u. 1915/16; 57. Jahresbericht, 1916/17.
Colmar. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, N. F., Bd. 14, 1916/17.

Danzig. Westpreußischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen, Jahrg. 16, Nr. 1—4.
— — Zeitschrift, Heft 57.
— Technische Hochschule:
— — Personalverzeichnis W.-S. 1917/18.
— Westpreußischer Botanisch-zoologischer Verein:
— — Bericht 39.
Darmstadt. Historischer Verein für das Großherzogtum Hessen:
— — Archiv für hessische Geschichte, N. F., Bd. 11, Heft 2.
— — Quartalblätter, 5. Bd., Nr. 19/20; 6. Bd., Nr. 1—4.
Davos. Meteorologische Station:
— — Wetterkarten 1917, Nr. 1—12.
Dessau. Verein für Anhaltische Geschichte:
— — Mitteilungen, N. F., Heft 4.
Dillingen. K. Lyzeum:
— — Studienjahr 1916/17.
Disko. Danske arktiske station:
— — No. 10.
Dresden. K. Sächsischer Altertumsverein:
— — Neues Archiv für sächsische Geschichte, Bd. 38.
— — Jahresbericht 1916.
— K. Sächsische Landes-Wetterwarte:
— — Dekaden-Monatsberichte 1915, Jahrg. 18.
— Redaktion des Journals für praktische Chemie:
— — Journal 1916, Nr. 18—24; 1917, Nr. 1-18.
— Verein für die Geschichte Dresdens:
— — Rachel, Altdresdener Familienleben.
— — Dresdener Bildnisse: Mackowsky.
Drontheim. Norske Videnskabens-Selskab:
— — Skrifter 1914, I, II; 1915, I, II.
— — Aarsberetning 1914 und 1915.
Dürkheim. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17.

Eisenberg (S.-A.). Geschichts- und altertumsforschender Verein:
— — Mitteilungen, Heft 32/33.
Erfurt. K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften:
— — Jahrbücher, N. F., Heft 42 und 43.

Erfurt. Verein für Geschichte und Altertumskunde von Erfurt:
— — Mitteilungen, Heft 38.
Erlangen. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17.
— K. Universitätsbibliothek:
— — Schriften aus den Jahren 1915/16 in 4⁰ und 8⁰.

Frankfurt a. M. Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft:
— — 46. Bericht.
— Physikalischer Verein:
— — Jahresbericht 1916/17.
— Römisch-germanische Kommission des Kais. Deutschen Archäologischen Instituts:
— — 8. und 9. Bericht über die Fortschritte der römisch-germanischen Forschung.
— — Korrespondenzblatt, Nr. 1—6.
Frauenfeld (Schweiz). Thurgauische Naturforschende Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Heft 22.
Freiburg i. Br. Breisgau-Verein „Schau ins Land":
— — „Schau ins Land", 42. und 43. Jahrlauf.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1917.
Friedrichshafen. Verein zur Geschichte des Bodensees:
— — Schriften, Heft 46, 1917.
Fürth. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17.

Geestemünde. Männer vom Morgenstern:
— — Jahresbericht 17, 1914—16.
Genf. Archives suisses d'anthropologie générale:
— — Archives, tome 1—4.
— Observatoire:
— — Resumée météorologique de l'année 1916.
— — Observations des fortifications de St. Maurice 1916.
— Redaktion des „Journal de chimie physique":
— — Journal, tome XIV, No. 4; tome XV, No. 1—4.
— Société de physique et d'histoire naturelle:
— — Mémoires, vol. 38, fasc. 6; vol. 39, fasc. 1.
— — Compte rendu des séances 33, 1916.
Giessen. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1917 in 4⁰ und 8⁰.

Görlitz. Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 28, 1917.
— Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Codex diplomaticus Lusatiae superioris, Bd. 4, Heft 3.
— — Neues Lausitzisches Magazin, Bd. 92 und 93.

Göttingen. K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Göttingische Gelehrte Anzeigen 1917, Nr. 1—8.
— — Abhandlungen, N. F.: Philol.-hist. Klasse, Bd. 16, Nr. 2—5.
— — Nachrichten: a) Philol.-hist. Klasse, 1917, Heft 1 und 2;
b) Math.-phys. Klasse, 1916, Heft 2; 1917, Heft 1;
c) Geschäftliche Mitteilungen, 1916, Heft 2; 1917, Heft 1.
— — Gauß, Werke, Bd. 10, 1.
— Universitätsbibliothek:
— — Vorlesungsverzeichnis 1917 und 1918.
— — Verzeichnis der Studierenden, W.-S. 1917/18.
— — Dissertationen 1915/16.

Graz. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen im S.-S. 1917, W.-S. 1917/18.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark:
— — Mitteilungen, Bd. 52 und 53.

Greifswald. Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein:
— — Pommersche Jahrbücher, Bd. 17.

Groningen. Astronomisches Laboratorium:
— — Publications, No. 26.
— Niederländische botanische Gesellschaft:
— — Recueil des travaux, vol. XIII, 1—4; vol. XIV, 1, 2.
— — Neederlandsch kruidkundig archief, 1915 und 1916.
— — Prodromus florae Bataviae, vol. I, p. 4.

Guben. Gesellschaft für Anthropologie und Altertumskunde:
— — Niederlausitzer Mitteilungen, Bd. 13, Heft 5—8.

Haag. Gesellschaft zur Verteidigung der christlichen Religion:
— — Programm für das Jahr 1916 und 1917.
— K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie:
— — Bijdragen, deel 73, afl. 1, 2.

Haarlem. Hollandsche Maatschappy der Wetenschappen:
— — Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, sér. III B, tom. 3, livr. 2/3.
— Musee Teyler:
— — Archives, ser. III, vol. 4, 1.

Halle. K. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher:
— — Nova Acta, Bd. 102.
— — Leopoldina, Heft 53, No. 1—12.
— Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Bd. 71, Heft 1—4.
— — Abhandlungen, Bd. 13, Heft 4.
— Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1917; W.-S. 1917/18.
— Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums:
— — Jahresbericht 1915/16.
— — Zeitschrift für Geschichte und Kunst, Bd. 6, Heft 1, 2; Bd. 7, Heft 1, 2.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen u. Thüringen:
— — Zeitschrift für Naturwissenschaften, Bd. 86, Nr. 4.
Hamburg. Stadtbibliothek:
— — Jahrbuch der wissenschaftlichen Anstalten Hamburgs, Jahrg. 33 und Beiheft 1—5.
— — Staatshaushaltsberechnung 1915, 4⁰.
— — Entwurf des hamburgischen Staatsbudgets für 1917, 4⁰.
— — Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft 1916, 4⁰.
— Deutsche Dichter-Gedächtnis-Stiftung:
— — Kalender für 1918.
— Mathematische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. V, Heft 6.
— Deutsche Seewarte:
— — Annalen der Hydrographie, Jahrg. 45, Nr. 1—4; 6—12.
— Verein für Hamburgische Geschichte:
— — Mitteilungen, 36. Jahrg., 1916.
— — Zeitschrift, Bd. XXI.
Hannover. Verein für Geschichte der Stadt Hannover:
— — Hannoverische Geschichtsblätter, 20. Jahrg., Heft 1—4.
— Historischer Verein für Niedersachsen:
— — Zeitschrift, Jahrg. 1916, Heft 1—4.
Heidelberg. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philologisch-philosophischen Klasse, Nr. 4.
— — Sitzungsberichte: a) philol.-histor. Klasse, 1914, Nr. 14, 15; 1916, Nr. 12, 13, 16, 17; 1917 No. 1—11; b) mathem.-naturw. Klasse 1916, A, Nr. 12, 13; 1917, A, Nr. 1—13, B, Nr. 1—7.
— — Jahresheft 1916.

Heidelberg. Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1917 in 4⁰ und 8⁰.
— Historisch-philosophischer Verein:
— — Neue Heidelberger Jahrbücher, Jahrg. 20, Heft 1.

Igló. Ungarischer Karpathen-Verein:
— — Jahrbuch, 44. Jahrg., 1917.

Ingolstadt. Historischer Verein:
— — Sammelblatt, Heft 36.

Innsbruck. Ferdinandeum:
— — Zeitschrift, Jahrg. 59, 1915.
— Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein:
— — Berichte, 36. Jahrg.

Jena. Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. 54, Heft 3, 4; Bd. 55, Heft 1.
— Verlag der Naturwissenschaftlichen Wochenschrift:
— — Wochenschrift 1917, Nr. 1—18, 19—44, 46—52.

Karlsruhe. Technische Hochschule:
— — Schriften 1915/16.
— — Verzeichnis der Vorlesungen 1917/18.
— — Bericht 1913—16.
— Badische Historische Kommission:
— — Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins, N. F., Bd. 32, Heft 1—4.
— — Neujahrsblätter, N. F., 1918, Heidelberg.
— — Badische Weistümer I, 1.

Kassel. Verein für hessische Geschichte und Landeskunde:
— — Zeitschrift, Bd. 50, 1917.
— — Mitteilungen 1915/16.

Kaufbeuren. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17.
— Verein „Heimat“:
— — Deutsche Gaue, Heft 321—360, Sonderheft 98, 101.

Kempten. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm von Helmreich.

Kiel. Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte:
— — Zeitschrift, Bd. 46, 1916.
— — Quellen und Forschungen, Bd. 4.

Klagenfurt. Landesmuseum:
— — Carinthia I, 107. Jahrg., Nr. 1—6.
— — Carinthia II, Nr. 105, 106, 107.
— — Jahresbericht des Historischen Museums 1915 und 1916.

Köln. Gesellschaft für rheinische Geschichtskunde:
— — 36. Jahresbericht, 1916.

Kopenhagen. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Översigt 1916, No. 4—6; 1917, Januar—Juni.
— — Mémoires, Section des sciences, sér. 8, tom. I, No. 4, 5, tom. II, No. 4.
— — Section des lettres, sér. 7, tom. 3, No. 2; tom. 4, No. 1.
— — Biologiske Meddelelser I, 1, 2.
— — Hist.-filol. Meddelelser I, 1, 4.
— — Mathemat.-fysiske Meddelelser I, 1, 2.
— Botanisk Haves Bibliothek:
— — Arbejder, No. 79—81.
— Carlsberg-Laboratorium:
— — Comptes rendus des travaux, vol. 11, livr. 6; vol. 13, livr. 1 3; vol. 14, livr. 1.
— — Festschrift für Jupetus Steenstrups Födsel, 2 voll.
— Conseil permanent international pour l'exploration de la mer:
— — Rapports et procès verbaux, vol. 24.
— — Bulletin hydrographique, année 1914/15.
— — Publications de circonstance, No. 12 (2e edition).
— Gesellschaft für nordische Altertumskunde:
— — Aarböger, III. Raekke, Bd. 5, 6.
— Observatorium:
— — Publikationer og mindre meddelelser frä, No. 26.
— Dänische biologische Station:
— — Report No. 24.

Krakau. Numismatische Gesellschaft:
— — Wiadomosci 1917, No. 1—12.
— Universität:
— — Kronika 1913/14, 1915/16.

Laibach. Musealverein für Krain:
— — Carniola, Bd. 7, No. 4; Bd. 8, No. 1—4.

Landau (Pfalz). K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm von Heinr. Heck.

Landsberg a. L. K. Realschule:
— — 39. Jahresbericht 1916/17.

Landshut. Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 53.
Lausanne. Société Vaudoise des sciences naturelles:
— — Bulletin, No. 191, 192.
Leiden. s'Rijks Herbarium:
— — Mededeelingen, No. 28—30.
— Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde:
— — Handelingen en Mededeelingen 1915/16.
— — Levensberichten 1915/16.
— — Tijdschrift, deel 34, afl. 2—4; deel 35, afl. 1—4.
— Redaktion des „Museum“:
— — Museum, maandblad voor philologie en geschiedenis, Jahrg. 24, No. 5—9, 11/12; Jahrg. 25, No. 1—4.
— Redaktion der „Mnemosyne“:
— — Mnemosyne, N. S., Bd. 45, No. 2—4; Bd. 46, No. 1.
Leipzig. Redaktion der Beiblätter zu den Annalen der Physik:
— — Beiblätter, 1916, Bd. 40, Nr. 21—24; 1917, Bd. 41, Nr. 1—21.
— K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 33, Nr. 5; Bd. 34, Nr. 3.
— — Abhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 33, 34, 35, je Nr. 3.
— — Berichte über die Verhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 68, Nr. 5, 6.
— — Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 68, Nr. 3, 4; Bd. 69, Nr. 1, 2.
— Gesellschaft für Erdkunde:
— — Mitteilungen für das Jahr 1915 und 1916.
— Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft:
— — Jahresbericht 1917.
Lemberg. K. K. Franzens-Universität:
— — Hundertjahrfeier.
— — Programm der Vorlesungen 1917/18.
— — Sktad 1915/16, 1916/17.
Linz. Museum Francisco-Carolinum:
— — 75. Jahresbericht.
Lohr. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm von Mayer.
Ludwigshafen a. Rh. K. Oberrealschule:
— — Jahresbericht 1916/17.
Lübeck. Naturhistorisches Museum:
— — Mitteilungen, 2. Reihe, Heft 27.
Lund. Redaktion von „Botaniska Notiser“:
— — Notiser, 1917, No. 1—6.

Lund. Universität:
— — Acta, N. Ser., aft. I, No. 12, 1916; aft. II, No. 12, 1916.
— — Bibelforskaren 1916, 1—6.
— — Arskrift, Kyrkohistorisk, Jahrg. 17, 1916.
— — Noreen, Vårtspråk III, 1—6.
Luxemburg. Institut Grand-ducal:
— — Archives trimestr. (de la section des sciences naturelles), vol. 5, fasc. 3/4.
— Société des naturalistes Luxembourgeois:
— — Bulletins, N. F., Jahrg. 8—10, 1914/16 und Festschrift 1890—1915.
Luzern. Historischer Verein der fünf Orte:
— — Geschichtsfreund, Bd. 71, 72.

Mannheim. Altertumsverein:
— — Mannheimer Geschichtsblätter, 18. Jahrg., 1917, Nr. 1—12.
Marbach. Schwäbischer Schillerverein:
— — Rechenschaftsbericht 21, 1916/17.
Marienburg. Verein für Herstellung der Marienburg:
— — Geschäftsbericht 1911—16.
— — Nachrichten 1912—16.
Marnheim (Pfalz). Realanstalt am Donnersberg:
— — Jahresbericht 1916/17.
Meiningen. Henneberg. altertumsforsch. Verein:
— — Neue Beiträge, Jahrg. 28.
Metten. K. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17.
Mitau. Kurländische Gesellschaft für Literatur und Kunst:
— — Sitzungsberichte 1914.
München. K. Landesanstalt für Gewässerkunde:
— — Veröffentlichungen, Wolkenbruch Nürnberg, 1914.
— — Jahrbuch 1914, Heft 2—4; 1915, Heft 1—3.
— K. Ludwigs-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm von Hauck.
— K. Luitpold-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm von Rueß.
— K. Maximilians-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm von Silverio und Hümmerich.
— K. Theresien-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm von Geiger.
— K. Wilhelms-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm von Huber.
— K. Wittelsbacher Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm von Simbeck.

München. K. Realgymnasium:
— — Jahresbericht, 1916/17 mit Programm von Zistl.
— K. Technische Hochschule:
— — Bericht über das Studienjahr 1914/15.
— — Programm für das Studienjahr 1917/18.
— — Personalstand im W.-S. 1916/17.
— Bayer. Landesausschuß für Naturpflege:
— — Jahresbericht 9/10, 1914/15.
— K. Landeswetterwarte:
— — Übersicht der Witterungsverhältnisse 1917, 1—10.
— Metropolitan-Kapitel München-Freising:
— — Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1917.
— — Amtsblatt der Erzdiözese München-Freising 1917 mit Register.
— K. Luitpold-Kreisoberrealschule:
— — 10. Jahresbericht 1916/17.
— K. Gisela-Kreisrealschule:
— — 13. Jahresbericht 1916/17.
— K. Maria Theresia-Kreisrealschule:
— — 18. Jahresbericht 1916/17.
— K. Universität:
— — Personalstand, S.-S. 1917 und W.-S. 1917/18.
— — Schriften aus dem Jahre 1917 in 4⁰ und 8⁰.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1917 und W.-S. 1917/18.
— K. Vasensammlung:
— — Katalog der K. Vasensammlung, Bd. I.
— Ärztlicher Verein:
— — Sitzungsberichte, Bd. 26, 1916.
— Historischer Verein von Oberbayern in München:
— — Altbayerische Monatschrift, Jahrg. 14, Heft 1 und 2.
Münster. Westfäl. Provinzialverein für Wissenschaft u. Kunst:
— — Jahresbericht 44.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift für vaterländische Geschichte, Bd. 74, 1.

Neuburg a. D. Historischer Verein:
— — Neuburger Kollektaneen-Blatt, 77./78. Jahrg.
Neuchâtel. Société Neuchâteloise de géographie:
— — Bulletin, tom. 26, 1917.
Nördlingen. Historischer Verein:
— — Jahrbuch 5, 1916.
Nürnberg. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 21.
— — Jahresbericht 1916.

Nürnberg. K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17.
— Germanisches Nationalmuseum:
— — Mitteilungen, 63. Jahresbericht.
— K. Kreisoberrealschule:
— — 10. Jahresbericht, 1916/17 mit Programm von Pöhlmann-Kuspert-Richard.

Osnabrück. Verein für Geschichte und Landeskunde:
— — Mitteilungen, Bd. 40, 1917.

Paderborn. Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift, Bd. 74, 2.
Pasing. K. Progymnasium:
— — 7. Jahresbericht 1916/17.
Passau. K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1916/17.
Plauen. Altertumsverein:
— — Mitteilungen, 27. Jahresschrift, 1917, Beilagen 1, 2.
Potsdam. Geodätisches Institut:
— — Veröffentlichungen, N. F., Nr. 70—74.
— Astrophysikalisches Observatorium:
— — Publikationen, Nr. 71, 72.
— Zentralbureau der internationalen Erdmessung:
— — Veröffentlichungen, Nr. 31.
Prag. Landesarchiv:
— — Landtagsverhandlungen, Bd. 15, Teil 1.
— K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Jahresbericht 1916.
— — Sitzungsberichte der philos.-hist. Klasse, 1916; der math.-naturwiss. Klasse, 1916.
— Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos“:
— — Lotos, Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 64, Nr. 1—10.
— Čechoslavisches Museum:
— — Narodpisný Věstník Českoslovanský, Bd. 11, Nr. 4; Bd. 12, No. 1—4.
— Knopfmuseum:
— — Berichte, Jahrg. 2, Nr. 1.

Prag. K. K. Sternwarte:
— — Magnetische und meteorologische Beobachtungen, Jahrg. 77, 1916.
— — Pracka, Untersuchungen über den Lichtwechsel älterer Sterne, Bd. II, 1916.
— Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
— — Mitteilungen, Jahrg. 55, Nr. 1—4.
— Deutsche Karl Ferdinands-Universität:
— — Ordnung der Vorlesungen, S.-S. 1917; W.-S. 1917/18.
— — Personalstand 1916/17 und 1917/18.
— — Inauguration des Rektors 1916/17.

Regensburg. Botanische Gesellschaft:
— Denkschriften, Bd. 13 = N. F., Bd. 7.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht für 1916/17 mit Programm von Weinmann.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Berichte, Bd. 15, 1913—16.
Rosenheim. Gymnasium:
— — Jahresberichte für 1916/17 mit Programm von Jäger.
Rostock. Naturforschende Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte und Abhandlungen, N. F., Bd. 6, 1914.
Rotterdam. Bataafsch genootschap der proefondervuidelijke Wijsbegeerte:
— — Nieuwe Verhandelingen, II. Reihe, VII. deel, stuk 2.

Salzburg. K. K. Staatsgymnasium:
— — Programm für das Jahr 1916/17.
— Gesellschaft für Salzburgische Landeskunde:
— — Mitteilungen 57, 1917.
St. Gallen. Historischer Verein:
— — Mitteilungen zur vaterländischen Geschichte, Bd. 34.
— — Neujahrsblätter 1913—17.
Sarajevo. Institut für Balkanforschung:
— — Zur Kunde der Balkanhalbinsel II, Quellen und Forschungen, Heft 5.
— Landesmuseum:
— — Wissenschaftliche Mitteilungen aus Bosnien, Nr. 13.
Schleusingen. Hennebergischer Geschichtsverein:
— — Schriften Nr. 10.
Schweinfurt. K. Realschule:
— — Jahresbericht 1916/17.
Stade. Verein für Geschichte und Altertümer etc.:
— — Stader Archiv, N. F., Heft 7.

Stavanger. Museum:
— — Aarshefte for 1916, vol. 27.
Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde:
— — Baltische Studien, N. F., Bd. 20, 1917.
— — Monatsblätter 1916, Nr. 1—12.
Stockholm. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, vol. 57 und Bihang 1 u. 2.
— K. Vitterhets Historie och Antikvitets Akademie:
— — Antikvitets Tidskrift 22, 1.
— K. Landtbruks-Akademie:
— — Handlingar och tidskrift, Bd. 56, 1917, No. 1—7.
— Entomologiska föreningen:
— — Tidskrift, Jahrg. 38, 1917, No. 1—4.
— Geologiska Föreningens:
— — Förhandlingar, Bd. 39, No. 1—7.
— Nationalekonomiska föreningen:
— — Förhandlingar 1916.
— Schwedische Gesellschaft für Anthropologie und Geographie:
— — Ymer, Jahrg. 36, Heft 4; Jahrg. 37, Heft 1, 2.
— Svenska Literatursälskapet:
— — Skrifter 7, No. 8, 9; 17, No. 18; Samlaren 36 und 37.
— Nordiska Museet:
— — Fataburen 1916, Heft 1—4.
— Reichsarchiv:
— — Meddelanden, N. F., 6, 1 und 6, 3, 1.
— Sveriges geologiska Undersöckning:
— — Årsbok 9, 1915; 10, 1916.
Strassburg. Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Schriften 30, 31.
— Internationale Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt:
— — 1913, Heft 1—4.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften 1916.
Straubing. Historischer Verein:
— — Jahresbericht 19, 1916.
Stuttgart. K. Landesbibliothek:
— — Fischer, Schwäbisches Wörterbuch, Lief. 54.
— Württemberg. Kommission für Landesgeschichte:
— — Vierteljahreshefte für Landesgeschichte, N. F., Jahrg. 25 und 26, Heft 1/2.

Stuttgart. K. Württembergisches Statistisches Landesamt:
— — Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde, Jahrg. 1916.

Thorn. Copernikus-Verein für Wissenschaft und Kunst:
— — Mitteilungen, Heft 24, 25.

Troppau. Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe:
— — Zeitschrift für Geschichte und Kulturgeschichte Österreichisch-Schlesiens, Jahrg. 10, 1915.

Upsala. K. Universität:
— — Arbeten, No. 17—19 und 20a, b.
— — Eranos. Acta philol. Suecana, vol. 15, fasc. 1—4.
— — Zoologiska Bidrag, Bd. 4, 5.
— Meteorologisches Observatorium der Universität:
— — Bulletin mensol., vol. 48, 1916 und Observations seismographiques 1912—17.
— Human. Vetenskaps Samfundet:
— — Skrifter, Bd. 17—19.

Utrecht. Historisch Genootschap:
— — Bijdragen en mededeelingen, deel 24, 36 und 37.
— Provincial Utrechtsch Genootschap:
— — Rapport 1917.
— Institut Royal Météorologique des Pays-Bas:
— — Mededeelingen en Verhandelingen, No. 21.
— — Ergebnisse aërologischer Beobachtungen, Nr. 4, 1915.
— Physiol. Laborat. d. Hoogeschool:
— — Onderzoekingen V, No. 18.

Vaduz. Histor. Verein für das Fürstentum Lichtenstein:
— — Jahrbuch, Bd. 16.

Warschau. Prace matematijczno-fizyczne:
— — Prace, tom. 25—28, 1914/17.

Weihenstephan. A. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei:
— — Bericht 1916/17.

Wien. Kaiserl. Akademie der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte: a) der philos.-histor. Klasse, Bd. 175, Abh. 4; Bd. 177, Abh. 4; Bd. 179, Abh. 4 u. 5; Bd. 180, Abh. 5; Bd. 181, Abh. 2 u. 4; Bd. 182, Abh. 2, 3, 5 u. 6; Bd. 183, Abh. 2 u. 5; Bd. 184, Abh. 1, 2 u. 3; Bd. 185, Abh. 1; b) der math.-naturwiss. Klasse, Abt. I, Bd. 125, Heft 5—10; Abt. IIa, Bd. 125, Heft 7—10; Abt. IIb, Bd. 125, Heft 6 u. 8—10; Abt. III, Bd. 124 u. 125.

Wien. Kais. Akademie der Wissenschaften:
— — Denkschriften der philos.-histor. Klasse, Bd. 59, 1.—3. Abh.; Bd. 60, 2. Abh.
— — Anzeiger (math.-naturwiss. Klasse) 1917, Nr. 1—22.
— — Almanach 1916, 66. Bd.
— — Jagič, Suppl. psalterie Bononiensis, 1917.
— K. K. Gesellschaft der Ärzte:
— — Wiener Klinische Wochenschrift 1917, Nr. 1—45, 47—52.
— Zoologisch-botanische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 67, Nr. 1—6.
— — Abhandlungen, Bd. 9, Nr. 3.
— Österreichische Kommission für internationale Erdmessung:
— — Verhandlungen 1912/13 und 1914.
— K. K. militärgeographisches Institut:
— — Astronomisch-geodätische Arbeiten, Bd. 23.
— K. K. Naturhistorisches Hofmuseum:
— — Annalen, Bd. 30, Nr. 3/4.
— Mechitaristen-Kongregation:
— — Handes Amsorya 1916, No. 1—12.
— K. K. Geologische Reichsanstalt:
— — Verhandlungen 1916, Nr. 13/14 und 15/16; 1917, Nr. 1—8.
— — Jahrbuch, Bd. 66, Heft 1.
— K. K. Universität:
— — Inauguration des Rektors 1916/17, 1917/18.
— — Übersicht der Behörden 1916/17, 1917/18.
— — Vorlesungen, S.-S. 1916 und 1917; W.-S. 1916/17 und 1917/18.
— — Bericht über die volkstümlichen Universitätsvorträge 1915/16.
— Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik:
— — Jahrbücher, Bd. 49, 50.

Wiesbaden. Verein für Naturkunde:
— — Jahrbücher, Jahrg. 69.

Winterthur. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Heft 11.

Würzburg. Physikalisch-medizinische Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte, 1916, Nr. 1—7; 1917, Nr. 1—6.
— — Verhandlungen, N. F., Bd. 44, Heft 3—6; Bd. 45, Heft 1—3.
— K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm von Stang.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17 mit Programm.

Würzburg. K. Universität:
— — Personalstand 1917 und 1917/18.
— Historischer Verein:
— — Archiv, Bd. 58.
— — Jahresbericht für 1915.

Zürich. Antiquarische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 28, Heft 2 = Nr. 80.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Neujahrsblatt 118, 119.
— — Vierteljahresschrift, Jahrg. 61, Heft 3/4; Jahrg. 62, Heft 1/2.
— Schweizerische Geologische Kommission:
— — Geologische Spezialkarten 29a, 66a u. b, 73b, 77, 80, 83.
— — Äppli, Geschichte der geologischen Kommission 1915.
— Schweizerisches Landesmuseum:
— — Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde, N. F., Bd. 18, Nr. 4; Bd. 19, Nr. 1—3.
— — 25. Jahresbericht, 1916.
— Bibliothek des Eidgenössischen Polytechnikums:
— — Dissertationen 1917/18.
— — Programm, S.-S. 1917.
— Sternwarte:
— — Astronomische Mitteilungen, Nr. 106.
— Schweizerische meteorologische Zentralanstalt:
— — Annalen, 52. Jahrg., 1915.

Zweibrücken. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1916/17.

Geschenke von Privatpersonen, Geschäftsfirmen und Redaktionen:

Best Chr. in Betwar:
— Nervetropfe, Dialektdichtung in Rothenburger Mundart.

Brandstetter Renward in Zürich:
— Die Reduplikation in den indianischen, indonesischen und indogermanischen Sprachen.
— Die Lauterscheinungen in den indonesischen Sprachen.
— Die Hirse im Kanton Luzern.
— Verzeichnis seiner wissenschaftlichen Veröffentlichungen.

Cohn Berthold in Straßburg:
— Almanach perpetuum celest. motuum. (S.-A.)

Familler Ignaz in Karthaus Brüll:
— Denkschriften der K. Bayer. Botanischen Gesellschaft Regensburg. Bd. XIII.

Fick R. in Innsbruck:
— 4 Sonderabdrücke.

Flesch Karl in Reichenau:
— Die Ausrottung der Tuberkulose.

v. Groth Paul in München:
— Topographische Übersicht der Minerallagerstätten. (S.-A.)

Hasselberg K. B. in Stockholm:
— „Zur Erinnerung an Nils Christoffer Dunér".

Heß Wilhelm in Bamberg:
— Das Horoskop des Astrologen Andreas Goldmayer auf die Stadt Würzburg.

Hupp Otto in Schleißheim:
— Zum Streit um das Missale speciale Constantiense, 1917.

Kayer E. in Marburg:
— Beiträge zur Geologie des Rimberggebietes bei Marburg von Hugo Lieber. Bamberg 1917.

Keune in Metz:
— Kriegsarbeit des Museums zu Metz, 1917.

Kull J. V. in München:
— Margarethe, 2. Gemahlin Kaiser Ludwigs IV. und ihre nächsten Nachkommen als Grafen von Hennegau-Holland 1345—1433. (S.-A.)
— Schinderlinge. (S.-A.)
— Reformationsdenkmünzen aus dem Bereiche des heutigen Bayerns. (S.-A.)

Kull J. V. in München:
— Die Wittelsbacher als Könige von Dänemark, Schweden und Norwegen.
— Die Pfalzgrafen von Scheyern-Wittelsbach im 12. Jahrhundert. (S.A.)

Kurz J. B. in Ansbach:
— Heimat und Geschlecht Wolframs von Eschenbach.

Lecat Maurice in Brüssel:
— Bibliographie du calcul des variations. Paris 1916.

Loeb James in München:
— Die Terrakotten der Sammlung Loeb, II. Bd., herausgegeben von J. Sieveking.

Mehlis Chr. in Neustadt a. H.:
— Geologisches und Paläolithisches aus der Umgebung von Neustadt a. H.
— Thrakisch-illyrisches Volkstum im vorgeschichtlichen Süddeutschland. (S.-A.)

Mörikofer W. in Basel:
— Klimatische Normalweite für Basel. B. 1916. (S.-A.)

Ney Alfred in Pfullingen:
— Weihnachten bei den Kriegsgefangenen im Bereiche des XIII. und XIV. Armeekorps.

Noreen Adolf in Lund:
— Vårt Språk, Heft 6. 17. 19. 21. 23. 24.

La Paix par le droit:
— 1916, 19—22 und 1917, 1—20.

Prutz Hans in München:
— Die Friedensidee, 1917.

Ryd V. H. in Kopenhagen:
— Publikationer fra det Danske Meteorologiske Institut, Meddelelser No. 3, 1917.

Schmied-Kowarzik Walther in Wien:
— Ein Weltbund des Deutschtums.

Schnyder Otto in Frauenfeld:
— Grundzüge einer Philosophie der Musik.

Schröder Alfred in Dillingen:
— Archiv für die Geschichte des Hochstifts Augsburg, 5. Bd, Lief. 3 und 4.

Schuchardt Hugo in Graz:
— Verzeichnis seiner Druckschriften, 1915.

*

Schuller Rod. R. in Rio:
— A nova gazeta da terra do Brasil. Rio 1914.

Schweidar W. in Kiel:
— Bewegung der Drehachse der elastischen Erde im Erdkörper und im Raume. Kiel 1916. (S.-A.)

Sucro Theodor in München:
— Statistische Untersuchungen über Sterblichkeits-Verhältnisse der bayer. mittleren Eisenbahnbeamten 1890—1914.

Trübner J., Verlagsbuchhandlung in Straßburg:
— Zeitschrift für Assyriologie, Bd. 31, Heft 1. 2.

Wahrmund Lud. in Innsbruck:
— Quellen zur Geschichte des römisch-kanonischen Prozesses im Mittelalter, Bd. III, Heft II.

Wlassak Moriz in Wien:
— Anklage und Streitbefestigung im Kriminalrecht der Römer. (S.-A.)

Zeller Josef in Ringingen:
— Das Augsburger Burggrafenamt und seine Inhaber von ihrem ersten Auftreten bis zum Untergang des alten Reichs. (S.-A.)

Die Minimalzahl der stationären Ebenen eines räumlichen Ovals.

Von Hans Mohrmann.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 13. Januar 1917.

Herr Geh. Hofrat Finsterwalder machte mich gelegentlich darauf aufmerksam, daß für den Begriff des räumlichen Ovals der Begriff des überall konvexen Körpers von grundlegender Bedeutung sein müsse, insofern Züge gewundener algebraischer Kurven 4. Ordnung mit weniger als 4 reellen stationären Ebenen niemals ganz auf der Begrenzung eines überall konvexen Körpers liegen (können). Dies hat mich veranlaßt, der Frage nachzugehen, wobei ich die Finsterwaldersche Vermutung in vollem Umfange bestätigt gefunden habe.

1. Bezeichnet man als räumliches Oval im engeren Sinne eine stetig gewundene geschlossene Kurve ohne singulären Punkt (Doppelpunkt, Ecke usw.), welche auf einer ganz im Endlichen gelegenen geschlossenen, überall konvexen Fläche liegt, die mit keiner Geraden des Raumes mehr als 2 Punkte gemein hat (Ovaloid), so gilt der folgende Satz, der das genaue Analogon des Möbiusschen Satzes über die Minimalzahl der Wendepunkte (stationären Tangenten) eines von singulären Punkten freien ebenen, unpaaren Kurvenzuges ist:

Satz I. Ein auf einem Ovaloid gelegenes räumliches Oval (im engeren Sinne) besitzt mindestens 4 (reelle) stationäre Ebenen.

Beweis: Eine Schmiegungsebene des Ovals schneidet aus dem Ovaloid eine überall konvexe geschlossene Kurve aus, die ich kurz Schmiegungskurve des Ovals nennen will. Irgend 2 Schmiegungskurven können als ebene Schnitte eines Ovaloids

nicht mehr als 2 Punkte miteinander gemein haben. Nun durchsetzt aber die einer nicht stationären Schmiegungsebene zugehörige Schmiegungskurve das Oval (auf dem Ovaloid) im Berührungspunkte. Hieraus folgt, wenn man ein Stück eines Ovals, das keinen Wendepunkt (d. i. Berührungspunkt einer stationären Ebene) enthält, als gleichgewundenen bezeichnet, der folgende

Hilfssatz. Zwei aufeinander folgende Schmiegungskurven eines gleichgewundenen Stückes eines räumlichen Ovals berühren einander, zwei nicht aufeinanderfolgende haben keinen Punkt miteinander gemein.

Da nun keine Schmiegungsebene eines räumlichen Ovals mit einer Tangential- bzw. Stützebene des Ovaloids, auf dem das Oval liegt, zusammenfallen kann, also auch keine Schmiegungskurve reducibel ist, so folgt aus unserem Hilfssatz, daß das Kontinuum der Schmiegungskurven des Ovals auf dem Ovaloid mindestens 2 Grenzkurven aufweist. Solchen Grenzkurven entsprechen aber stationäre Schmiegungsebenen des Ovals. Ein räumliches Oval besitzt daher jedenfalls 2 stationäre Ebenen.

Angenommen nun, es gäbe räumliche Ovale, die nur 2 stationäre Ebenen besitzen, so würde für diese auf dem Ovaloid das zwischen den beiden Grenzkurven liegende Gebiet, das von dem Oval durchquert wird, genau doppelt überdeckt. Durch jeden Punkt des Ovals ginge daher außer der zugehörigen Schmiegungsebene nur noch eine weitere Schmiegungsebene hindurch, was zu einem Widerspruch führt.

Projiziert man nämlich das räumliche Oval aus einem seiner Punkte (Knesersches Verfahren[1])) auf eine diesen Punkt nicht enthaltende Ebene, so erhält man als Bild einen unpaaren Kurvenzug ohne singulären Punkt (Doppelpunkt, Ecke usw.) und ein solcher besitzt (nach einem von Möbius aufgestellten Satze) immer mindestens 3 reelle Wendepunkte (stationäre Tangenten), was nur dadurch möglich ist, daß mindestens drei Schmiegungsebenen des räumlichen Ovals durch das Pro-

---

[1]) Weber-Festschrift, Leipzig 1912, S. 170.

jektionszentrum hindurch gehen. Die Annahme, ein räumliches Oval besitze nur 2 stationäre Ebenen, ist daher unhaltbar, womit unser Satz bewiesen ist.

Wir fügen noch hinzu, daß jener Satz für nicht auf einem Ovaloid gelegene, ganz im Endlichen verlaufende, geschlossene und von singulären Punkten freie paare Kurvenzüge, wie das Beispiel der algebraischen gewundenen Kurve 4. Ordnung 2. Art mit 4 reellen die Kurve in einem weiteren Punkte treffenden Tangenten lehrt, nicht gilt.

2. Projiziert man eine geschlossene, ganz im Endlichen verlaufende, stetig gekrümmte, ebene Kurve ohne singulären Punkt stereographisch auf eine Kugel, so erhält man auf dieser ein räumliches Oval im engeren Sinne. Die Schmiegungskurven dieses Ovals sind Kreise, die den Krümmungskreisen der ebenen Kurve entsprechen. Hieraus folgt

Satz 2. Eine ganz im Endlichen verlaufende geschlossene, stetig gekrümmte, ebene Kurve ohne singulären Punkt (Doppelpunkt, Ecke usw.) besitzt, auch wenn sie Wendepunkte hat, mindestens 4 Scheitel (d. h. von 0 verschiedene Extrema der Krümmung).

Ein Kurvenzug 4. Ordnung dieser Art, z. B. mit 2 Wendepunkten[1]) besitzt (mindestens) 4 Scheitel, 3 Maxima und 1 Minimum der Krümmung; die Maxima werden durch das Minimum und die beiden Wendepunkte, die ja auch Minima der Krümmung sind, getrennt.

Für überall konvexe Kurven ergibt sich aus Satz 2 der Carathéodory-Knesersche Satz über die Mindestzahl der Scheitel[2]).

---

[1]) Etwa die Epizykloide (Epistrophoide):

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi + (1-a)\cos 2\varphi \\ y = 2\sin\varphi + (1-a)\sin 2\varphi \end{cases} \qquad (0 < a < \tfrac{1}{2}).$$

[2]) Wegen der Literatur über diesen Satz vgl. man Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 161.



Über den elastischen Verdrehungswinkel eines Stabs.

Von A. Föppl.

Vorgetragen in der Sitzung am 13. Januar 1917.

Die älteste Formel für die Berechnung des Winkels, um den ein gerader Stab von überall gleichem Querschnitt, der aus einem isotropen und dem Hookeschen Elastizitätsgesetze gehorchenden Stoffe besteht, durch ein im Endquerschnitte angreifendes Kräftepaar vom Momente M verdreht wird, geht bis auf Coulomb zurück. Jedenfalls ist der ganze Verdrehungs- oder Drillungswinkel proportional mit der Stablänge. Bezeichnet man den auf die Längeneinheit kommenden Winkel mit ϑ, so kann nach Coulomb

$$\vartheta = \frac{M}{J_p G} \tag{1}$$

gesetzt werden, wenn man unter G den Schubelastizitäts-Modul des Stoffes und unter J_p das polare Trägheitsmoment der Querschnittsfläche versteht, also das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt senkrecht zur Querschnittsebene gezogene Achse. Für einen vollen Kreisquerschnitt, um den es sich hierbei zunächst handelte, kann

$$J_p = \tfrac{1}{2}\pi r^4$$

in die Formel eingesetzt werden und in der Gestalt, die sie damit erlangt, hat sie sich für den kreisförmigen Querschnitt in der Tat als richtig erwiesen.

In allen anderen Fällen gilt dagegen Gl. (1) nicht mehr. Immerhin kann man sie der allgemeinen Form nach auch in

den anderen Fällen aufrecht erhalten, wenn man unter J_p nicht mehr das polare Trägheitsmoment versteht, sondern eine andere ebenfalls nur von der Gestalt und den Maßen der Querschnittsfläche abhängige, rein geometrische Größe, die ihrer Dimension nach ebenso wie J_p eine Länge zur vierten Potenz bedeutet. Insofern trifft nämlich Gleichung (1) stets zu, als der Verdrehungswinkel proportional dem verdrehenden Momente M und umgekehrt proportional dem Schubelastizitätsmodul G zu setzen ist, während er im übrigen nur noch von der Gestalt und der Größe des Querschnitts abhängig ist. Man kann diesem Umstande dadurch Ausdruck geben, daß man an Stelle von Gl. (1) allgemeiner

$$\vartheta = \frac{M}{JG} \tag{2}$$

schreibt und unter J die in dem betreffenden Falle einzusetzende Querschnittsfunktion versteht.

Für das Produkt JG gebraucht man häufig die Bezeichnung „Verdrehungssteifigkeit". Diese ist also sowohl vom Querschnitt als von den elastischen Eigenschaften des Stoffes abhängig. Es ist aber bequem, noch eine andere ähnliche Bezeichnung für die vom Querschnitte allein abhängige Größe J zu haben und ich will sie daher hier den „Drillungswiderstand" des Querschnitts nennen. Im Falle des kreisförmigen Querschnitts wird demnach der Drillungswiderstand durch das polare Trägheitsmoment angegeben, während er in anderen Fällen erst noch zu ermitteln ist.

Die Bestimmung des Drillungswiderstandes und hiermit auch des Verdrehungswinkels geht nicht nur die Elastizitätstheorie an, sondern sie ist auch für die Technik von erheblicher Bedeutung. Man sollte daher meinen, daß diese Aufgabe wenigstens für alle Fälle, die bei den Anwendungen häufiger vorkommen, entweder eine genaue oder doch wenigstens eine mit genügender Annäherung zutreffende Lösung gefunden haben müßte. Das trifft aber keineswegs zu. Zwar für die einfacheren Querschnittsformen, wie Ellipse, Rechteck, Dreieck, Kreissektor und eine Anzahl anderer hat man genaue

Formeln dafür abgeleitet; aber daneben kommen bei den Anwendungen in der Technik Querschnittsgestalten vor, namentlich bei den Walzeisenträgern, für die es bisher an jeder zuverlässigen Ermittelung des Drillungswiderstandes fehlt. In den technischen Handbüchern findet man zwar Formeln empfohlen, die dafür gelten sollen; aber eine genauere Prüfung lehrt, daß sie keineswegs in allen Fällen, auf die sie angewendet werden sollen, zutreffen, sondern häufig zu ganz falschen Schlüssen führen, wie ich nachher noch nachweisen werde.

Eine praktische Anwendung finden diese Formeln für den Verdrehungswinkel sehr häufig bei den Walzeisen, weil man aus diesen die großen Tragkonstruktionen im Hochbau oder im Aufbau von Krangerüsten und ähnlichen Bauten zusammensetzt. Unter den Walzeisen treten wieder am häufigsten die I-Eisen hervor, weshalb sie bei den folgenden Betrachtungen als Hauptbeispiel ins Auge gefaßt werden sollen.

Bei den Bauten, von denen ich sprach, werden freilich die Walzeisenträger gewöhnlich so angeordnet, daß sie weniger auf Verdrehen als auf Biegen beansprucht werden. Aber nebenher tritt doch noch leicht eine Beanspruchung auf Verdrehen hinzu, die dann stets wegen der geringen Widerstandsfähigkeit der Träger gegen Verdrehen eine sorgfältige Beachtung erfordert. So werden z. B. die gekrümmten Träger, die man zur Unterstützung von vorspringenden Bauteilen wie Balkonen u. dgl. verwendet, stets sowohl auf Biegen als auf Verdrehen beansprucht. Jede eingehendere Berechnung von Trägern dieser Art muß sich daher auf eine Formel für den Verdrehungswinkel stützen.

Für die Berechnung der Walzeisen auf Biegung ist von vornherein gut vorgesorgt. In den Verzeichnissen, die von den Walzwerken über die Querschnitte der von ihnen hergestellten Träger herausgegeben werden, den sogenannten „Profil-Tabellen“, findet man bei jedem Querschnitt, so weit nötig, eine Angabe über die Richtungen der Querschnittshauptachsen und über die auf diese Hauptachsen bezogenen Trägheitsmomente. Die Berechnung auf Biegung gestaltet sich auf

dieser Grundlage sehr einfach. Dagegen fehlt bis jetzt jede Angabe, die sich für die Berechnung des Verdrehungswinkels verwenden ließe. Wenn bei jedem Querschnitt außer den Trägheitsmomenten auch der Drillungswiderstand verzeichnet wäre, was sich ohne große Schwierigkeiten durchführen ließe, wäre den Benutzern dieser Tabellen in vielen Fällen sehr gedient. Aber offenbar haben die Ausschüsse, die von den Hüttenleuten und von den Eisenverbrauchern zur Bearbeitung der Profil-Tabellen bei neuen Ausgaben immer wieder eingesetzt wurden, bisher nicht recht gewagt, solche Angaben beizufügen, weil sie sich selbst nicht recht darüber klar waren, wie man den Wert für den Drillungswiderstand ermitteln sollte. In dieser Lücke ist der beste Beweis dafür zu erblicken, daß es recht nötig ist, diese Frage einmal etwas genauer zu behandeln.

Navier, der in der Mitte des vorigen Jahrhunderts eine führende Rolle in der technischen Mechanik spielte, glaubte Gl. (1) mit der Deutung von J_p als polares Trägheitsmoment für beliebige Querschnitte allgemein aufrecht erhalten zu können. Er kam zu diesem Schlusse, daß der Drillungswiderstand stets gleich dem polaren Trägheitsmomente zu setzen sei, indem er von der Annahme ausging, daß die Querschnittsflächen bei der elastischen Formänderung durch Verdrehen stets eben blieben. Aber diese Annahme, die sich bei der Untersuchung der Biegung sehr wohl bewährt hatte, ist bei der Drillung im allgemeinen ganz unrichtig; nur beim kreisförmigen Querschnitt trifft sie tatsächlich zu. Freilich spukt die Formel (1) im Sinne von Navier selbst jetzt noch vereinzelt in technischen Kreisen herum, obschon sie bei der Mehrzahl der Techniker schon vor einem Menschenalter als unrichtig erkannt war.

Den Nachweis für die Fehlerhaftigkeit der Navierschen Theorie der Verdrehung erbrachte de Saint-Venant. Er zeigte, daß sich die Querschnittsflächen bei der Verdrehung im allgemeinen krümmen; er stellte die Differentialgleichung auf, der die gekrümmte Fläche genügen muß, mit der dazu gehörigen Randbedingung, die es bewirkt, daß zu verschiedenen Querschnittsgestalten ganz verschiedene Lösungen gehören und

gab für eine größere Zahl von Querschnittsformen die strengen Lösungen des in dieser Weise gefaßten mathematischen Problems an. Daraus folgten auch genaue Formeln für den Verdrehungswinkel ϑ oder, wie man dafür sagen kann, für den Drillungswiderstand J in den von ihm untersuchten Fällen. Man findet eine zusammenhängende Darstellung der Ergebnisse von de Saint-Venant in den von ihm nach dem Tode des ursprünglichen Verfassers in dritter Auflage herausgegebenen Vorlesungen von Navier[1]). In einem über 200 Seiten füllenden Anhange zu dem Paragraphen, in dem Navier die Torsion der Stäbe besprochen hatte, widerlegt de Saint-Venant die darin ausgesprochenen Ansichten und entwickelt die von ihm selbst aufgestellte Theorie der Torsion in großer Ausführlichkeit.

Die Ergebnisse, zu denen de Saint-Venant hierbei gelangte, sind heute allgemein anerkannt. Sie haben sich auch, so weit bekannt, beim Vergleiche mit den Beobachtungen bei Verdrehungsversuchen stets gut bewährt. Auch in der Technik werden die aus den strengen Lösungen von de Saint-Venant abgeleiteten Verdrehungsformeln heute allgemein angewendet.

Aber diese strengen Lösungen der Verdrehungsaufgabe sind nur für eine begrenzte Zahl von Querschnittsformen aufgestellt worden und sie nützen nichts, wenn man mit anderen zu tun bekommt. Abgesehen vom Winkeleisen, das von Herrn Fritz Kötter[2]) behandelt wurde, liegt bisher keine strenge Lösung vor, die sich für die Walzeisenquerschnitte benützen ließe. Diesen Mangel hat schon de Saint-Venant selbst empfunden. Er suchte ihm durch Aufstellen von Näherungsformeln für den Verdrehungswinkel abzuhelfen, die mit einer für die praktischen Anwendungen ausreichenden Genauigkeit für eine große Zahl sehr verschiedener Querschnittsformen brauchbar sein sollten. Nach der ersten der von ihm aufgestellten Näherungsformeln wäre nach der hier gebrauchten Bezeichnungsweise der Drillungswiderstand

---

[1]) Navier, Résumé des leçons, 3ème édition par Barré de Saint-Venant. Paris 1861.

[2]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1908, S. 935.

$$J = \frac{4\, J_x J_y}{J_p} \tag{3}$$

zu setzen, wenn man unter J_x und J_y die Trägheitsmomente für die in der Querschnittsebene liegenden beiden Hauptachsen versteht. Später hat er aber diese Formel ausdrücklich wieder verworfen mit der Bemerkung, er habe sich überzeugt, daß sie nur für elliptische Querschnitte verwendbar sei und an ihrer Stelle eine neue empfohlen[1]). Nach dieser neueren Formel soll

$$J = \frac{F^4}{40\, J_p} \tag{4}$$

sein, wobei unter F der Flächeninhalt des Querschnitts zu verstehen ist.

Als de Saint-Venant diese letzte Formel aufstellte, lag seine Lebensarbeit schon fast vollständig hinter ihm und er konnte daher die Formel bereits mit allen von ihm aufgefundenen strengen Lösungen des Torsionsproblems vergleichen, was bei der früheren nicht der Fall war. Dementsprechend ist der Gültigkeitsbereich, innerhalb dessen die Formel noch eine annehmbare Genauigkeit liefert, viel weiter gesteckt, als bei der früheren. Aber in anderen Fällen, für die man damals noch keine besser begründete Lösung kannte, versagt die Formel, wie ich nachher noch zeigen werde, trotzdem vollständig. Es ist daher gefährlich, sich ihrer zu bedienen, wenn man nicht vorher schon weiß, daß der betreffende Querschnitt zu denen gehört, bei denen kein allzu großer Fehler befürchtet zu werden braucht.

Eine besondere Begründung hat de Saint-Venant für die Formel (4) nicht gegeben: er stellt sie einfach als eine Interpolationsformel hin, die in den meisten Fällen gut zutrifft. Man kann jedoch erkennen, wie er dazu gekommen ist. Gegen die von Navier vertretene „alte Theorie“ der Torsion, also gegen die Formel (1) hatte er einen jahrzehntelangen Kampf zu führen, um seiner Theorie zur allgemeinen Anerkennung zu verhelfen. Dabei mußte er immer wieder darauf hinweisen,

[1]) Comptes rendus 88, 1879, p. 142.

daß beim rechteckigen oder elliptischen Querschnitt der Drillungswiderstand nicht etwa zunimmt, je länger gestreckt man ihn bei gleichem Flächeninhalt annimmt, wie nach Formel (1) zu erwarten wäre, sondern daß vielmehr umgekehrt, wie schon die einfachsten Beobachtungstatsachen lehren, das Quadrat von allen Rechtecken und der Kreis von allen Ellipsen gleichen Flächeninhalts den größten Drillungswiderstand liefern. Der Gegensatz seiner Theorie gegenüber der alten Theorie wird daher am deutlichsten hervorgehoben, wenn man J umgekehrt proportional mit J_p setzt. Das war in beiden Formeln (3) und (4) geschehen. Die Formel (3) hat er später offenbar nur deshalb aufgegeben, weil sie bei den später von ihm gefundenen strengen Lösungen nicht mehr genügend zutraf. Daß bei gleicher Querschnittsgestalt J mit der Fläche des Querschnitts wachsen muß, ist selbstverständlich und zwar muß, damit die Formel in den Dimensionen zutrifft, die vierte Potenz von F in den Zähler gesetzt werden. Der Zahlenfaktor 40 im Nenner ergab sich ihm als abgerundeter Mittelwert aus verschiedenen, zwischen etwa 38 und 42 liegenden Zahlen, die man beim Vergleich der Formel mit den genauen Lösungen in den verschiedenen Fällen findet. So wäre z. B. beim elliptischen Querschnitt nach der genauen Theorie eigentlich

$$J = \frac{F^4}{4\pi^2 J_p}$$

zu setzen, was aber nahezu mit Gl. (4) übereinstimmt.

Übrigens weist de Saint-Venant in seiner Abhandlung selbst schon darauf hin, daß die Formel (4) nicht immer brauchbar ist. Als Beispiel einer solchen Ausnahme erwähnt er einen Querschnitt von der Gestalt eines Kreissektors mit einem mehr als zwei Rechte betragenden Zentriwinkel, also mit einer einspringenden Ecke. Beim Halbkreis dagegen liefert die Formel noch eine gute Übereinstimmung mit dem dafür bekannten genauen Werte. Daß die Formel auf einen kreisringförmigen Querschnitt, oder mit anderen Worten auf eine hohle Welle nicht angewendet werden darf, hat er ohne Zweifel auch gewußt, wenn er es auch nicht ausdrücklich sagt.

Wenn de Saint-Venant daran gedacht hätte, daß seine Formel (4) später einmal auf solche Querschnittsformen angewendet werden könnte, wie sie bei den dünnwandigen und scharf eingeschnittenen Walzeisen vorkommen, die man nach den heutigen Walzverfahren herzustellen vermag, würde er sich wahrscheinlich etwas vorsichtiger bei der Empfehlung der Formel für den praktischen Gebrauch ausgedrückt und eine vorhergehende genauere Prüfung einer solchen Anwendung als nötig bezeichnet haben.

In der praktischen Technik stützt man sich heute bei der Berechnung des Verdrehungswinkels — von vereinzelten Ausnahmen vielleicht abgesehen — offenbar fast ausschließlich auf die Arbeiten von de Saint-Venant, ohne auf die grundsätzlich davon abweichenden neueren Arbeiten, die übrigens zum Teil auch schon viele Jahre zurückliegen, irgend wie Rücksicht zu nehmen. Das geht z. B. sehr deutlich aus der Behandlung hervor, die der Abschnitt über die Verdrehungselastizität in dem überall verbreiteten und viel gebrauchten Nachschlagewerk „Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch“ gefunden hat. Auf dieses Buch, das schon in 22. Auflage erschienen ist, beziehen sich die Ingenieure gern, wenn sie bei ihren Berechnungen eine Quelle anführen wollen und eine Formel, die darin nicht aufgenommen ist, wird von vornherein mit Mißtrauen betrachtet. In der neuesten, im Jahre 1915 erschienenen Auflage findet man die in der Technik heute gebrauchten Formeln für den Verdrehungswinkel in Bd. I, S. 570 zusammengestellt. Außer den genauen Formeln für die einfacheren Querschnitte oder den daraus für diese Fälle abgeleiteten, gut stimmenden Näherungsformeln findet man nur noch als allgemeiner gültig die Formeln (3) und (4) angegeben. In der „Hütte“ ist jedoch Formel (3) noch mit einem Berichtigungskoeffizienten versehen, durch dessen passende Wahl die Anwendbarkeit der Formel natürlich erweitert werden kann. Da dieser Koeffizient aber nur für die einfachsten Fälle angegeben ist (für die ohnehin schon gute Lösungen bekannt sind), scheidet diese Formel für alle anderen Fälle aus; sie würde auch ohne genauere

Kenntnis des Berichtigungsfaktors, wie schon de Saint-Venant selbst bemerkt hat, unter Umständen zu ganz falschen Ergebnissen führen.

Einem Praktiker, der für einen Walzeisenträger den Verdrehungswinkel berechnen will und der in der „Hütte" nach einer Formel sucht, auf die er sich dabei stützen kann, bleibt daher gar keine andere Wahl als die Anwendung der neueren Saint-Venantschen Formel (4). Man wird daher annehmen dürfen, daß in der Technik die Berechnung in solchen Fällen fast ausnahmslos nach dieser Formel vorgenommen wird. Ich muß dies näher besprechen, weil ich diese Berechnungsgrundlage hier als trügerisch nachweisen und davor warnen will. Deshalb führe ich auch noch an, daß in der „Hütte" zur Empfehlung der Formel gesagt wird, daß sie näherungsweise auch für stark vom Rechteck oder Kreise abweichende Querschnitte, wie z. B. I-Profile gültig sei, wobei zur Abschätzung der dabei zu erwartenden Fehler angegeben wird, daß der genauere Wert des eigentlich an die Stelle der Zahl 40 zu setzenden Koeffizienten je nach der Querschnittsform nur zwischen 38,5 und 42,68 schwanke. Wer dies liest und sich darauf verläßt, wird kein Bedenken tragen, die Formel (4) auf alle in der Technik vorkommenden Walzeisenprofile (selbstverständlich mit Ausnahme der Hohlquerschnitte, wie der Röhren u. s. f.) anzuwenden, falls er sich mit einer Genauigkeit von etwa 5 oder gar von 10 vom Hundert begnügen kann, die bei Festigkeitsberechnungen für praktische Zwecke häufig vollständig ausreicht.

Nun stimmen die Angaben der „Hütte" in der Tat mit denen von de Saint-Venant ziemlich überein. Es wird freilich nicht gesagt, daß dieser auch von Ausnahmen gesprochen hat und daß die zur Beurteilung der Genauigkeit angeführten Zahlen nur für Querschnittsformen gültig sind, die keineswegs mit I-Profilen näherungsweise zusammenfallen. Aber man kann den Herausgebern der „Hütte" trotzdem kaum einen Vorwurf daraus machen, daß sie diese Vorbehalte unterdrückt haben, wenn man die Äußerung liest, mit der schließlich de Saint-

Venant seine Formel für den praktischen Gebrauch empfohlen hat. Er sagt nämlich: „On voit donc qu'en se bornant aux sections de prismes pouvant être employés et même de prismes plats ou de rails on ne se trompera jamais beaucoup en prenant généralement pour le moment de torsion . . .“, worauf die der Gl. (4) entsprechende Formel folgt.

Daß man sich in der Technik auf eine so gewichtige Empfehlung, die von dem erfolgreichsten Bearbeiter, ja von dem Schöpfer der heutigen Theorie der Torsion herrührt, gern verläßt und auf Stimmen, die sich dagegen wenden, nicht leicht hört, ist durchaus begreiflich. Nur durch die Vorführung von ganz unzweideutigen Versuchsergebnissen würde man den Glauben an die Gültigkeit der Saint-Venantschen Formel innerhalb der jetzt angenommenen Grenzen in der Technik vielleicht erschüttern können. Aber selbst dies ist noch zweifelhaft, da man nicht alle Fälle, um die es sich dabei handelt, prüfen kann und weil auch die Bedenken, die sich gegen die Beweiskraft von Versuchen mit Rücksicht auf die gewählten Versuchsbedingungen stets erheben lassen, nur schwer widerlegt werden können. Um die Formel von de Saint-Venant wirksam bekämpfen zu können, muß man sich daher schon der Waffen von de Saint-Venant selbst bedienen, d. h. man muß auf theoretischem Wege den Nachweis führen, daß sie innerhalb der jetzt angenommenen Gültigkeitsgrenzen zu ganz falschen Ergebnissen führen kann. Erst wenn ein solcher Nachweis vorliegt, gegen den von berufener Seite kein Widerspruch erhoben wird, gewinnt ein Versuch, der diese Kritik bestätigt, das nötige Schwergewicht. Aus diesem Grunde wende ich mich mit dieser Abhandlung nicht an die technischen Kreise, die ich erst später vor der unvorsichtigen Anwendung der Formel (4) zu warnen beabsichtige, sondern zunächst an die Mathematiker und an die Physiker, die sich mit Fragen der Elastizitätslehre zu beschäftigen pflegen und denen es weder, wie den praktischen Ingenieuren, an der Zeit, noch auch an der Befähigung fehlt, eine genauere Prüfung vorzunehmen und sich selbst ein Urteil über die Frage zu bilden.

Schon jetzt möchte ich indessen bemerken, daß ich mit der Ausführung von Verdrehungsversuchen mit Walzeisen schon vor längerer Zeit begonnen habe, um die Sache auch von dieser Seite her zu beleuchten. Als aber meine beiden Assistenten zum Heer eingezogen und auch noch andere Erschwerungen der Versuchsausführung durch den Krieg herbeigeführt wurden, entschloß ich mich, die Weiterführung dieser Versuche bis nach der Beendigung des Krieges zurückzustellen. Ich behalte mir vor, in späterer Zeit darüber an anderer Stelle zu berichten. Einstweilen aber möchte ich nicht länger zögern, hier die theoretischen Einwendungen zu begründen, die sich gegen Formel (4) erheben lassen und zugleich eine andere einfache Formel vorzuschlagen. Diese Formel bezieht sich freilich nur auf dünnwandige Walzeisenquerschnitte, verspricht aber für diese auch wirklich zuverlässige Ergebnisse.

Es wird sich nämlich zeigen, daß man für gewisse Grenzfälle, denen die Querschnitte der Walzeisenträger zum großen Teile wenigstens sehr nahe kommen, eine strenge Lösung des Torsionsproblems angeben kann. Und wenn man findet, daß die Formel (4) in diesen Grenzfällen vollständig unrichtige Ergebnisse liefert, ist damit genügend gezeigt, daß sie auch für die ganz ähnlichen, wirklich ausgeführten Profile unzuverlässig ist. Zugleich ist damit auch der Weg gewiesen, um eine besser brauchbare Formel aufzustellen. Übrigens liegen die Vorarbeiten zu einem solchen Beginnen schon seit sehr langer Zeit bereit; sie wurden bisher nur nicht genügend beachtet und es bedarf für mich jetzt nur noch eines ganz kleinen Schrittes, um sie nutzbar zu machen.

Der erste Anfang dazu ist in einer Bemerkung zu erblicken, die von den großen Physikern W. Thomson (Lord Kelvin) und Tait herrührt[1]). Später hat man den wichtigen Gedanken, der darin ausgesprochen wurde, ein wenig anders gefaßt, so daß er noch anschaulicher wurde. Hiernach kommt die strenge

---

[1]) W. Thomson und P. G. Tait, Handbuch der theoretischen Physik. Deutsche Übersetzung von Helmholtz und Wertheim, 1. Band, 2. Teil. Braunschweig 1874, S. 228.

Lösung des Torsionsproblems für einen gegebenen Stabquerschnitt auf die Ermittelung einer ebenen Flüssigkeitsbewegung hinaus, die ganz innerhalb der Querschnittsfläche verläuft, also am Rande überall der Umrißlinie folgt und deren Wirbelstärke über die ganze Fläche den gleichen Wert hat. Die Stromlinien dieser zur Abbildung verwendeten Flüssigkeitsbewegung fallen zusammen mit den Spannungslinien, die überall in den Richtungen der im Querschnitt übertragenen Schubspannungen fortschreiten und die Geschwindigkeit der Strömung ist proportional mit der Schubspannung, die an der gleichen Stelle des Querschnitts durch die Verdrehung des Stabs hervorgerufen wird. Dieses „hydrodynamische Gleichnis“, wie ich es nannte, ist in den Kreisen der Physiker wohl ziemlich allgemein bekannt geworden; ich selbst habe es mir angelegen sein lassen, in meinem Lehrbuche[1]) auf das sich daraus ergebende Verfahren zur näherungsweisen Lösung der Verdrehungsaufgabe eindringlich hinzuweisen und es an einigen Beispielen zu erläutern. Übrigens war auch schon von den ersten Urhebern des Verfahrens, also von Thomson und Tait selbst, ausdrücklich der Nutzen hervorgehoben worden, der sich daraus für die näherungsweise Berechnung der Torsionssteifigkeit ziehen ließe, wenn auch kein unmittelbarer Gebrauch davon gemacht wurde.

Einen erheblichen Schritt weiter in der gleichen Richtung hat dann L. Prandtl[2]) gemacht. Er hat nämlich noch einen anderen Vergleich gezogen, der sich ebenfalls zur Ableitung von guten Näherungsformeln für den Verdrehungswinkel, namentlich für solche Querschnitte, wie sie bei den Walzeisen vorkommen, sehr gut eignet. Dabei ist dieser Vergleich vielleicht noch anschaulicher als das hydrodynamische Gleichnis

[1]) A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, 3. Bd., Festigkeitslehre, 5. Aufl., Leipzig 1914, S. 399. In etwas kürzerer Fassung auch schon in der 1. Auflage vom Jahre 1897.

[2]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, 1904, S. 31. Eine Wiedergabe des wesentlichen Inhalts der Prandtlschen Abhandlung findet man auch in meinem Lehrbuche, Bd. 5, Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie, Leipzig 1907, S. 173.

und jedenfalls hat er den Vorzug, einen Weg anzugeben, auf dem das Torsionsproblem auch durch einen einfachen Versuch gelöst werden kann.

Denkt man sich nämlich in eine dünne Wand ein Loch geschnitten von der Gestalt des Stabquerschnitts, für den man die Verdrehungsaufgabe lösen will und spannt man über das Loch eine Seifenhaut aus, auf die von der einen Seite her ein Luftüberdruck wirkt, so baucht sich die Haut aus und die Fläche, nach der dies geschieht, steht unter der Voraussetzung, daß die Ausbauchung klein bleibt, in einem einfachen Zusammenhange mit der Stabverdrehung. Bezeichnet man mit Prandtl den Raum, der zwischen der ausgebauchten Haut und der ursprünglichen Ebene liegt, als einen Hügel, so geben, wie man leicht beweisen kann, die Linien gleicher Höhe, die man auf diesem Hügel ziehen kann, die Gestalt der Spannungslinien im Stabquerschnitt bei der Verdrehung an. Ferner ist die Größe der Schubspannung an jeder Stelle proportional mit dem Gefäll des Hügels an der entsprechenden Stelle. Und endlich läßt sich noch beweisen, daß das Volumen des Hügels für ein gegebenes Verhältnis zwischen der Spannung der Seifenhaut und dem Luftüberdruck proportional ist mit dem Verdrehungswiderstand J des Stabquerschnitts oder mit anderen Worten proportional der Verdrehungssteifigkeit des Stabs. Gerade der zuletzt angeführte Satz von Prandtl eignet sich sehr gut zur Entscheidung der Frage, mit der wir uns hier beschäftigen.

Dann muß ich noch eine andere Abhandlung besprechen, die schon um 20 Jahre zurückliegt und die ebenfalls, wenn sie auch von ganz anderen Gesichtspunkten ausgeht, sehr wohl geeignet ist, als Grundlage für die Ableitung eines guten Näherungswertes für den Drillungswiderstand von Walzeisenprofilen zu dienen. Sie wurde von Rudolph Bredt unter dem Titel „Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität“ in der verbreitetsten technischen Zeitschrift[1]) veröffentlicht, hat aber bisher auch in technischen Kreisen offenbar gar keine Beach-

---

[1]) Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 1896, S. 785.

tung gefunden, obschon sie ohne Zweifel zu den besten Arbeiten gehört, die über diesen Gegenstand jemals veröffentlicht wurden. Der Verfasser war damals Ingenieur einer Maschinenfabrik in Wetter a. d. Ruhr. Ich habe seiner Zeit aus Anlaß seiner Veröffentlichung mit ihm in Briefwechsel gestanden; inzwischen ist er, wie ich hörte, gestorben.

Diese Arbeit ist sehr merkwürdig; sie ist ein gewiß sehr seltenes Beispiel dafür, wie ein scharfsinniger Geist trotz geringer theoretischer Schulung, ohne jede eingehendere Kenntnis der wichtigsten vorausgehenden Arbeiten auf einem immerhin nicht ganz einfachen Gebiete die Wahrheit einfach erschaut und zwar über die Grenzen hinaus, bis zu denen andere vor ihm schon gekommen waren, ohne daß er davon wußte. Verfehlt ist an der Arbeit nur die Kritik, die der Titel ankündigt. Er tadelt darin die Mathematiker, weil sie die Sätze, die er ableitet und für neu hält, nicht selbst schon gefunden und beachtet hätten und meint deshalb, daß ihre Lösungen falsch sein müßten. Aber die Arbeiten von de Saint-Venant, gegen die sich diese Bemerkungen richten, waren Bredt gar nicht näher bekannt; er wußte von ihnen nur aus einem kurzen Auszuge in dem Buche von Grashof und man muß zugeben, daß ihm dessen Fassung leicht zu einem Mißverständnisse Anlaß geben konnte. So kam es, daß die Kritik von Bredt auf einer falschen Voraussetzung über den Umfang und den genaueren Inhalt der früheren Leistungen auf diesem Gebiete aufgebaut und daher ganz unberechtigt war. Um so bemerkenswerter und zutreffender sind dagegen seine übrigen Ausführungen, die noch um ein gutes Stück über die Ergebnisse von de Saint-Venant hinausreichen.

Für den Leser, der das „hydrodynamische Gleichnis“ bereits kennt und außerdem auch mit dem Satze von Stokes bekannt ist, von denen beiden Bredt aber natürlich nichts wußte, kann man den Satz, den er ableitet und dann zum Ausgangspunkt aller weiteren Erörterungen macht, mit wenigen Worten erklären und auch beweisen. Nach dem Satze von Stokes ist das Linienintegral des Vektorfeldes, als das man die Verteilung

der Schubkräfte über die Querschnittsfläche des verwundenen Stabs ansehen kann, für jede geschlossene Kurve, die man im Querschnitt ziehen mag, gleich dem Oberflächenintegral des Wirbels dieses Vektorfeldes über die von der Kurve umschlossene Fläche. Dieser Wirbel ist aber im vorliegenden Falle über die ganze Fläche von gleicher Größe und beträgt für die Flächeneinheit $2G\vartheta$. Das Linienintegral der Schubspannung kann daher gleich $2FG\vartheta$ gesetzt werden, wenn man unter F den von der beliebig gewählten Kurve umschlossenen Teil des Flächeninhalts des Querschnitts versteht.

Bredt gelangt zu diesem Satze durch die unmittelbare geometrische Anschauung, die sich an die krumme Fläche knüpft, in die der vorher ebene Stabquerschnitt bei der Drillung übergeht. Er versteht es freilich nicht recht, seinen Gedankengang klar zu legen. Ich habe es schwer gefunden, ihm zu folgen und ich glaube kaum, daß mich die Bredtsche Beweisführung von der Richtigkeit seiner Schlüsse überzeugt hätte, wenn mir der Satz nebst den unmittelbar daran geknüpften Folgerungen nicht schon von früher her in der Form des Stokesschen Satzes geläufig gewesen wäre. Aber richtig sind seine Ergebnisse, wie daraus schon hervorgeht, zweifellos.

Indem Bredt den Ausgangssatz auf ein unendlich kleines Rechteck anwendet, findet er die Differentialgleichung, die ausdrückt, daß der Wirbel des Vektorfeldes gleich $2G\vartheta$ sein muß und hier betont er, daß dieser Satz, dessen Wichtigkeit er wohl erkannte, früher übersehen worden wäre, was aber natürlich nicht zutrifft. Auf die Möglichkeit, die Aufgabe auf eine Flüssigkeitsströmung zurückzuführen, verfällt Bredt zwar nicht, wohl aber zeichnet er mit sicherem Verständnis die Spannungslinien ihrem allgemeinen Verlaufe nach in die von ihm behandelten Querschnitte ein, so daß man beim ersten Anblick das von anderen Arbeiten her bekannte Strombild vor sich zu haben glaubt.

Als Techniker dachte Bredt natürlich von vornherein auch an die Walzeisenträger und zwar namentlich an die I-Träger. Was er über diese sagt, ist wohl bis heute noch nicht über-

troffen worden. Besonders seine Bemerkungen über die Stelle, an der die größte Beanspruchung auftritt, bei denen er sich gegen eine herrschende irrtümliche Ansicht wendet, sind vollständig zutreffend und beweisen, wie tief er die ganze Frage erfaßt und durchdacht hat. Hierbei muß man bemerken, daß vor 20 Jahren die neueren Walzverfahren noch nicht bekannt waren, die inzwischen zu dünnwandigen, an den Flanschen breiter ausladenden und weniger abgeschrägten Querschnittsprofilen geführt haben. Sonst würde Bredt wohl damals schon für diese Profile zu ungefähr denselben Schlüssen gelangt sein, die ich jetzt selbst gezogen habe; die Grundlagen dazu liefert seine Arbeit wenigstens ohne weiteres, also ohne daß man eine der anderen vorher besprochenen Vorarbeiten daneben auch noch zu Rat ziehen müßte.

Zu der Formel für den Verdrehungswinkel eines I-Trägers gelangt Bredt, indem er den von ihm aufgestellten Satz, der dem Satze von Stokes entspricht, auf den ganzen Umfang U und die davon eingeschlossene Fläche des I-Profils anwendet. Das über den Umfang erstreckte Linienintegral setzt er gleich dem Umfange mal dem mittleren Werte der längs des Umfangs auftretenden Schubspannung, den er dann noch mit der in der Mitte des Stegrands auftretenden Spannung vergleicht. So erhält er die Formel

$$\vartheta = c \frac{UM}{eF^2G}, \tag{5}$$

worin c ein Zahlenfaktor ist, dessen Wert von der Gestalt des Umrisses abhängt. Unter e ist die halbe Stegdicke des Trägers zu verstehen. Der Drillungswiderstand ist daher nach Bredt

$$J_{Br} = \frac{eF^2}{cU} \tag{6}$$

zu setzen. Da der Faktor c nicht näher ermittelt ist, kann man die Formel freilich nicht unmittelbar verwenden. Indessen läßt sich in dem Grenzfalle, von dem sofort die Rede sein wird, diese Ermittelung leicht nachholen, so daß man auch auf diesem Wege die dafür nachher aufzustellende Formel ableiten kann.

Ich komme jetzt zu der Zusatzbemerkung, die ich den hier aufgeführten älteren Arbeiten beizufügen habe, um zu der Formel zu gelangen, die ich selbst für die Ermittelung des Drillungswiderstands eines Walzträgerquerschnitts empfehlen möchte. Man findet nämlich, daß sich die Walzeisenquerschnitte meist annähernd und oft ziemlich genau aus einigen schmalen Rechtecken zusammensetzen, wobei die an den Zusammenschlußstellen je zweier Rechtecken entstehenden einspringenden Ecken mit Ausrundungen versehen sind. Diese Ausrundungen sind wegen des Herstellungsverfahrens der Träger erforderlich; zugleich verhüten sie auch, daß die in der Ecke bei der Verdrehung eintretende Spannungserhöhung zu groß ausfällt. Für die Größe des Verdrehungswinkels sind sie bedeutungslos, so daß sie hier unbeachtet bleiben können.

Die in den letzten Zeiten ausgebildeten Walzverfahren[1]) gestatten, Träger herzustellen, deren Querschnitte nicht nur mit guter Annäherung die aus Rechtecken zusammengesetzte Gestalt zeigen, sondern bei denen auch das Verhältnis zwischen Langseite und Schmalseite dieser Rechtecke erheblich größer sein kann, als sich dies früher erreichen ließ. Von dieser Möglichkeit macht man auch immer mehr Gebrauch, da solche Träger aus Gründen, auf die ich jetzt nicht einzugehen brauche, als vorteilhaft zu betrachten sind.

Unter diesen Umständen liegt es sehr nahe, bei der Ableitung einer Formel für den Verdrehungswinkel solcher Walzeisen von der Voraussetzung auszugehen, daß für jedes der Rechtecke die Schmalseite näherungsweise als unendlich klein gegenüber der Langseite anzusehen sei. Das ist die Grundlage, auf der die Formel beruht, die ich hier aufstellen will und man sieht daraus schon, daß ihre Anwendung ausschließlich auf solche Querschnitte beschränkt ist, bei denen man die Voraussetzung gelten lassen kann. Wie weit man darin gehen darf, ermittelt man am besten auf dem Wege des Versuchs

[1]) Vgl. R. Sonntag, Breitflanschige und parallelflanschige I-Eisen. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 1916 (in verschiedenen Fortsetzungen).

und dazu soll die Versuchsreihe dienen, mit der ich bereits begonnen habe und die ich später fortsetzen will.

Im Grenzfalle der unendlich schmalen Rechtecke kann man im Sinne der strengen Elastizitätstheorie den Satz aufstellen, daß der Drillungswiderstand eines aus den Rechtecken zusammengesetzten (einfach zusammenhängenden) Querschnitts gleich ist der Summe der Drillungswiderstände der einzeln für sich genommenen Rechtecke.

Den Beweis für diese Behauptung kann man etwa nach dem Vorgange von Bredt führen, indem man das Linienintegral der Schubspannung sowohl für den ganzen Querschnitt als für die einzelnen Teilstücke bildet und die erhaltenen Werte miteinander vergleicht oder auch mit Benützung der von Prandtl eingeführten Darstellung des Drillungswiderstandes durch den Rauminhalt des von der Seifenhaut gebildeten Hügels. Auch zu diesem Zwecke zerlegt man die Querschnittsflächen durch Schnitte in die einzelnen Rechtecke, womit auch der Hügel in einzelne Teilhügel zerfällt. Offenbar ist dann die Summe der Rauminhalte der Teilhügel etwas kleiner als der Hügel über der ganzen Querschnittsfläche, weil sich an den Schnittstellen eine Talfurche ausbildet, die bis zum Hügelfuße hinabreicht, während sich vorher der Hügel über der Grenzlinie ununterbrochen fortsetzte. Aber bei den Größenverhältnissen der Schmalseiten zu den Langseiten der Rechtecke, die wir hier voraussetzen, macht der Unterschied nur einen kleinen Bruchteil des ganzen Hügelinhalts aus, der im Grenzfalle vernachlässigt werden kann.

Es möge übrigens noch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß sich diese Betrachtung nur auf einfach zusammenhängende Querschnittsflächen bezieht, daß sie also nicht etwa auf Röhren u. dgl. angewendet werden kann. Bei mehrfach zusammenhängenden Querschnittsflächen erfährt der Hügel durch einen Schnitt nicht nur eine rein örtliche Störung, die im Grenzfalle vernachlässigt werden kann, sondern er wird dadurch seiner ganzen Erstreckung nach vollständig verändert, womit der Rauminhalt bedeutend, ja sogar auf einen kleinen

Bruchteil des früheren Wertes herabgesetzt wird. Auch hierüber gibt die von Prandtl gegebene Darstellung in sehr anschaulicher Weise Auskunft, worauf ich hier verweisen kann.

Bezeichnet man die Langseite eines Rechtecks mit l und die Schmalseite oder Dicke mit d, so geht für den Grenzfall $l:d = \infty$ die von de Saint-Venant für den rechteckigen Querschnitt aufgestellte genaue Formel für den Verdrehungswinkel über in

$$\vartheta = \frac{3M}{d^3 l G}. \tag{7}$$

Man kann dies etwa in Band V meines Lehrbuchs mit dem Untertitel: „Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie", § 26, S. 156 (Leipzig bei Teubner 1907) nachlesen. Der Drillungswiderstand für ein unendlich schmales Rechteck ist daher

$$J = \frac{d^3 l}{3} \tag{8}$$

zu setzen, entsprechend zugleich dem Rauminhalt des Prandtlschen Hügels für den Grenzfall. Nach dem vorher aufgestellten Satze findet man demnach den Drillungswiderstand für alle in der hier angenommenen Weise zusammengesetzten Walzeisenprofile nach der Formel

$$J = \tfrac{1}{3} \Sigma d^3 l, \tag{9}$$

wobei sich die Summierung über alle einzelnen Rechtecke zu erstrecken hat. Anstatt Gl. (9) kann man auch unmittelbar die Formel für den Verdrehungswinkel

$$\vartheta = \frac{3M}{G \Sigma d^3 l} \tag{10}$$

anschreiben. Bei allen sehr dünnstegigen und breitflanschigen Trägern der neueren Art wird man sie ohne weiteren Beisatz verwenden können. Sind diese Voraussetzungen aber nicht genügend erfüllt, so wird man ihr einen aus Versuchsergebnissen abzuleitenden Berichtigungsfaktor ζ beigeben müssen, so daß sie in der Gestalt

$$\vartheta = \zeta \cdot \frac{3M}{G \Sigma d^3 l} \tag{11}$$

erscheint. Der Faktor ζ wird jedenfalls ein echter Bruch sein, der sich der Einheit um so mehr nähert, je schlanker das Profil in allen seinen Teilen erscheint.

Wir sind jetzt auch in den Stand gesetzt, die Brauchbarkeit der Näherungsformel (4) von de Saint-Venant für Walzeisenprofile zu prüfen. Dazu ist es nämlich nicht nötig, die Versuchsergebnisse abzuwarten, aus denen sich der Koeffizient ζ für die verschiedenen wirklich ausgeführten Walzeisenprofile ergeben wird. Denn die Formel (4) beansprucht, sofern man sie überhaupt auf I-Profile und ähnliche Walzeisenprofile anwendet, gleichmäßige Gültigkeit für alle Größenverhältnisse, die bei diesen vorkommen, ohne daß durch irgend eine Anwendungsvorschrift etwa darauf hingewiesen würde, unter welchen Umständen eine größere oder geringere Genauigkeit von ihr zu erwarten wäre. Es genügt daher, wenn man nachweisen kann, daß sie im Grenzfalle der unendlich schmalen Rechtecke, für den wir eine im Sinne der mathematischen Elastizitätstheorie strenge Lösung besitzen, zu erheblichen Fehlern führt, um sie überhaupt als trügerisch zu erkennen.

Zu diesem Zwecke betrachte ich zunächst einen Stab von kreuzförmigem Querschnitte, bei dem man durch Anwendung von Gl. (4) zu einem besonders weit von dem richtigen Werte abweichenden Drillungswiderstande geführt wird. Der Querschnitt bestehe also jetzt aus zwei schmalen Rechtecken, die sich in der Mitte kreuzen, so daß er wie ein Pluszeichen + aussieht. Nach unserer Formel (9) ist der Drillungswiderstand doppelt so groß, als für eins der beiden Rechtecke, aus denen man sich den Querschnitt gebildet denken kann. Dagegen wird nach Formel (4), wie man sofort sieht, der Drillungswiderstand für den zusammengesetzten Querschnitt achtmal so groß gefunden, als für jedes der beiden Rechtecke. In diesem Falle ist also die Unbrauchbarkeit der Saint-Venantschen Näherungsformel augenscheinlich nachgewiesen, da sie den Drillungswiderstand auf das Vierfache des richtigen Wertes überschätzt.

Man braucht nur an den Prandtlschen Hügel zu denken, um sich darüber Rechenschaft zu geben, daß die bedeutende Abweichung nicht etwa zum größeren Teile darauf zurückgeführt werden kann, daß das Verhältnis $l:d$ bei den wirklich ausgeführten Profilen nicht gleich ∞, sondern vielleicht gleich 10 oder so ähnlich ist. Auch bei diesen Größenverhältnissen wird vielmehr der Widerspruch ohne Zweifel zum großen Teile noch bestehen bleiben.

Für ein Flacheisen, also für ein einzelnes schmales Rechteck, erhält man nach Gl. (4)

$$J = \frac{12}{40} d^3 l,$$

was mit Gl. (8) noch hinlänglich übereinstimmt. Das war natürlich nicht anders zu erwarten, da de Saint-Venant den Fall des einfach rechteckigen Querschnitts, für den er die genaue Lösung schon lange vorher abgeleitet hatte, schon selbst zur Prüfung der Genauigkeit seiner Näherungsformel verwenden konnte und ihn mit dazu benützt hat, um den Zahlenfaktor 40 festzusetzen. Er würde die Näherungsformel jedenfalls gar nicht veröffentlicht haben, wenn sie schon in diesem einfachen Falle versagt hätte.

Bei einem Winkeleisen, also bei einem Querschnitt, der aus zwei gleichen schmalen Rechtecken gebildet wird, die in einer Ecke rechtwinklig zusammenstoßen, erhält man nach Gl. (9)

$$J = \tfrac{2}{3} d^3 l = 0{,}67\, d^3 l,$$

während man nach Formel (4) nach einfacher Ausrechnung

$$J_{Ven} = 0{,}96\, d^3 l$$

findet. In diesem Falle ist also der Widerspruch zwar nicht mehr so groß, wie beim kreuzförmigen Querschnitt, aber doch noch viel zu groß, als daß man den Fehler hinnehmen könnte.

Endlich möge noch der besonders wichtige I-förmige Querschnitt etwas näher betrachtet werden. Bei ihm sei die Höhe des Stegs (also des mittleren Querschnittsteiles) jetzt mit h bezeichnet und die Stegdicke mit d_1; ferner die Breite

der Flanschen mit b und ihre Dicke mit d_2. Dabei sind d_1 und d_2 von gleicher Größenordnung und beide sollen als unendlich klein angesehen werden gegenüber h und b. Nach Gl. (9) hat man dann für den Drillungswiderstand

$$J = \frac{1}{3}(d_1^3 h + 2\, d_2^3 b). \tag{12}$$

Hiermit ist der aus der Näherungsformel (4) folgende Wert

$$J_{Ven} = \frac{12}{40} \frac{(d_1 h + 2\, d_2 b)^4}{d_1 h^3 + 2\, d_2 b^3 + 6\, d_2\, b h^2} \tag{13}$$

zu vergleichen. Unter Voraussetzung eines breitflanschigen Trägers kann man ungefähr $b = h$ und $d_2 = 2\, d_1$ annehmen. Mit diesen Verhältniszahlen liefern die vorigen Formeln

$$J = \frac{17}{3} d_1^3 h = 5{,}67\, d_1^3 h$$
$$J_{Ven} = 11{,}03\, d_1^3 h.$$

Der Drillungswiderstand eines solchen Trägers wird demnach unter Zugrundelegung von Formel (4) auf fast das Doppelte überschätzt. Das gilt aber, wie wohl zu beachten ist, nur bei den angenommenen Größenverhältnissen, die den breitflanschigen Träger kennzeichnen. Setzt man dagegen, ohne sonst etwas zu ändern, $b = \frac{1}{2} h$, wie es ungefähr bei den älteren Normalprofilen zutrifft, so erhält man nach den Gleichungen (12) und (13)

$$J = 3\, d_1^3 h \text{ und } J_{Ven} = 3{,}24\, d_1^3 h$$

d. h. die Saint-Venantsche Näherungsformel liefert unter diesen Umständen einen immerhin noch annehmbaren Wert. Daher kann es nicht überraschen, daß bei Verdrehungsversuchen, die mit I-Trägern vom Normalprofil gelegentlich an verschiedenen Stellen ausgeführt wurden, im allgemeinen hinreichende Übereinstimmung mit der Saint-Venantschen Formel beobachtet worden zu sein scheint. Mit breitflanschigen Trägern scheint man einen solchen Versuch noch nicht vorgenommen zu haben. — Man sieht nun auch deutlich die Gefahr, die die Anwendung der Formel mit sich bringt. Will man die Verdrehungssteifigkeit von breitflanschigen Trägern mit der von Normalprofil-

trägern auf Grund der Formel (4) vergleichen, unter der hierbei selbstverständlich erscheinenden Annahme, daß sie in beiden Fällen ungefähr gleich gut zutreffen dürfte, so wird man zu ganz falschen Schlüssen geführt.

Hiermit ist das, was ich über den Verdrehungswinkel sagen wollte, erledigt. Aber ich möchte diese Abhandlung doch nicht schließen, ohne auf die andere Seite der Verdrehungslehre noch mit einigen Bemerkungen einzugehen. Diese andere Seite besteht in der Behandlung der Frage, an welcher Stelle des Querschnitts die größte Schubspannung $\tau_{\max}$ auftritt und ferner, in welchem Zusammenhange $\tau_{\max}$ mit dem verdrehenden Momente M steht. Auf die zahlreichen genauen oder angenäherten Lösungen, die man dafür bei den verschiedenen Querschnitten gefunden hat, brauche ich hier nicht einzugehen; es genügt, im Zusammenhange mit den vorhergehenden Betrachtungen die Beantwortung der Frage für den Grenzfall des aus schmalen Rechtecken zusammengesetzten Walzeisenquerschnitts zu versuchen.

Allgemein gesagt, kann jede Lösung dieser Spannungsaufgabe für irgend einen Querschnitt in der Form

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W} \tag{14}$$

angeschrieben werden, in der W eine nur von der Gestalt und der Größe des Querschnitts abhängige Größe bedeutet, von der man beim Abzählen der Dimensionen erkennt, daß sie eine Länge zur dritten Potenz darstellt. Diese Formel stimmt überein mit der gewöhnlichen Biegungsformel, nach der man die durch ein Moment M hervorgebrachten Biegungsspannungen berechnet. Die im Falle der Biegung auftretende Größe W wird das Widerstandsmoment des Querschnitts genannt. Ich glaube, daß kein Bedenken dagegen besteht, diese Bezeichnung auch auf den Fall der Drehung zu übernehmen: natürlich mit dem Zusatze „Widerstandsmoment gegen Drehen“. Für die praktischen Berechnungen würde es eine große Erleichterung bedeuten, wenn in den Profiltabellen solcher Walzeisenträger, die öfters auch einmal auf Verdrehen beansprucht werden

können, dieses Widerstandsmoment ebenso angegeben wäre, wie das gegen Biegen. Diese Ergänzung wäre ebenso wichtig, wie die Beifügung des „Drillungswiderstandes“, die ich vorher schon in Anregung gebracht habe. Als Vorarbeit für eine solche Ermittelung werden die nachfolgenden Bemerkungen immerhin dienen können, wenn sie auch keinen Anspruch darauf erheben, den Gegenstand vollständig erledigen zu wollen.

Vorher machte ich schon von der Überlegung Gebrauch, daß der Prandtlsche Spannungshügel, dessen Höhenlinien die Gestalt der Spannungslinien angeben und dessen Gefäll überall mit der Größe der Spannung proportional ist, keine großen Veränderungen erfahren kann, wenn er im Grenzfalle der schmalen Rechtecke durch Trennungslinien in Teilhügel über den einzelnen Rechtecken zerlegt wird. Nur einen Vorbehalt muß man bei dieser Aussage machen. An den einspringenden Ecken nämlich hat der Hügel, wenn keine genügende Ausrundung vorgenommen ist, ein weit größeres Gefäll, als jeder der Teilhügel, die nach der Trennung des Querschnitts in seine Bestandteile dort zusammenstoßen. Es kann dann leicht das größte Gefäll sein, das überhaupt an irgend einer Stelle des ganzen Querschnittsumfangs vorkommt. Aber die Spannung τ_{max}, die ihm entspricht, hat für die Bruchgefahr, die man abschätzen will, nicht dieselbe Bedeutung, als wenn sie in derselben Größe an einer anderen Stelle vorkäme.

Sollte nämlich in der einspringenden Ecke wegen ungenügender Abrundung die Schubspannung die Elastizitätsgrenze überschreiten, so würde dies zwar eine kleine bleibende Formänderung zur Folge haben, die sich aber auch nur auf einen engen Bezirk beschränkte. Diese geringfügige bleibende Formänderung würde sofort an der davon betroffenen Stelle die Schubspannung herabsetzen, in ähnlicher Art, wie man es auch durch eine entsprechende Ausrundung der Ecke hätte bewirken können und damit wäre dem Übel und jeder weiteren Gefahr abgeholfen. Nur bei einem sehr spröden Stoffe kann daher eine solche rein örtliche Überschreitung der als noch zulässig anzusehenden Spannungsgrenze schon bei einmaliger Belastung

eine Bruchgefahr herbeiführen. Etwas anderes ist es freilich, wenn der Stab einem periodisch wechselnden Drehmomente ausgesetzt ist. Dann folgen sich die kleinen unelastischen Formänderungen an der überbeanspruchten Stelle immer von neuem in entgegengesetzter Richtung und so unbedeutend sie an sich auch sein mögen, können sie doch nach genügend häufiger Wiederholung schließlich einen sogenannten Ermüdungsbruch herbeiführen.

Aber die Walzeisenträger bestehen keineswegs aus einem spröden, sondern vielmehr aus einem recht zähen Stoffe und bei den Bauten, die man aus ihnen herstellt, handelt es sich auch in der Regel nicht um Belastungen, die dem Vorzeichen nach wechseln. Daher können selbst bei ungenügender Ausrundung der Ecken die dort zu erwartenden Spannungserhöhungen keinen Schaden tun. Mit dem Vorbehalte, daß in anderen Fällen hierauf zu achten sein würde, soll deshalb hier von ihnen abgesehen werden.

Dann läßt sich leicht zeigen, daß die größte Spannung, von der die Bruchgefahr abhängt, in der Mitte der Langseite jenes Rechtecks eintreten muß, dessen Dicke am größten ist. Alle Rechtecke bilden nämlich die Querschnitte von Flacheisen, die sich alle um denselben Winkel ϑ verdrehen müssen, wobei Formänderung und Spannung nach dem, was vorher besprochen war, ungefähr ebenso ausfallen, als wenn jedes dieser Flacheisen für sich genommen zu dem vorgeschriebenen Winkel ϑ verdreht würde. Für eines dieser Flacheisen hat man nach Gl. (7)

$$\vartheta = \frac{3 M_1}{d_1^3 l_1 G}$$

und für die größte in ihm in der Mitte der Langseite des Querschnitts auftretende Schubspannung τ_1 läßt sich, wie bekannt (vgl. etwa mein Lehrbuch, Bd. V, S. 163)

$$\tau_1 = \frac{3 M_1}{d_1^2 l_1}$$

setzen.

Aus der Verbindung beider Gleichungen findet man

$$\tau_1 = \vartheta d_1 G. \tag{15}$$

Das Verdrehungsmoment M_1, das von dem gerade betrachteten Flacheisen übernommen wird, ist aus dieser Gleichung verschwunden und ϑ hat für alle Teile denselben Wert. Demnach erlangt in der Tat τ_1 in jenem Rechteck den überhaupt größten Wert τ_{max}, dessen Dicke d den größten Wert d_{max} hat. Setzt man schließlich noch den Verdrehungswinkel ϑ aus Gl. (10) ein, so findet man

$$\tau_{max} = \frac{3\, M\, d_{max}}{\Sigma\, d^3\, l}, \tag{16}$$

wobei unter M das vom ganzen Stab aufzunehmende Verdrehungsmoment zu verstehen ist. Für den Grenzfall der unendlich schmalen Rechtecke wenigstens ist hiermit die Spannungsaufgabe ebenfalls gelöst.

Um diese Gleichung auf die Form der Gl. (14) zu bringen, hat man das Widerstandsmoment W gegen Verdrehen

$$W = \frac{\Sigma\, d^3\, l}{3\, d_{max}} = \frac{J}{d_{max}} \tag{17}$$

zu setzen. Bei den Walzeisenprofilen besteht demnach — so weit als die für den Grenzfall abgeleiteten Formeln noch als genügend genau angesehen werden können — ein ganz ähnlicher Zusammenhang zwischen Widerstandsmoment gegen Verdrehen und dem die Drehsteifigkeit bedingenden Drillungswiderstand J, wie er von der Biegungslehre her zwischen den entsprechenden Größen bekannt ist. Die alte Naviersche Theorie der Verdrehung hatte die Formeln der Biegungslehre fast unverändert übernommen. Das war freilich nicht richtig; aber man sieht doch, daß sich bis zu einem gewissen Grade eine solche formale Übereinstimmung wenigstens bei den praktisch besonders wichtigen Walzeisenprofilen immer noch aufrecht erhalten läßt.

Mit welchem Grade der Genauigkeit diese Formeln, die sich ja zunächst nur auf den Grenzfall beziehen, auch auf die

wirklich ausgeführten Walzeisen angewendet werden können, muß ich zunächst dahin gestellt lassen. Ich betrachte es als eine Aufgabe der für solche Zwecke eingerichteten Versuchsanstalten, an denen ja kein Mangel ist, hierüber Aufschluß zu geben. Ich muß dabei freilich hinzufügen, daß es stets erheblich schwieriger ist, eine Formel für die Spannung auf dem Versuchswege zu prüfen, als eine Formel für den Verdrehungswinkel oder für eine andere unmittelbar beobachtbare Formänderungsgröße. Aus diesem Grunde der leichteren Prüfungsmöglichkeit habe ich auch in dieser Abhandlung den Verdrehungswinkel vorangestellt und die Spannungsformel nur anhangsweise folgen lassen. Denn ich betrachte die theoretische Darlegung, die ich hier gab, nur als die eine Hälfte der ganzen Arbeit, der die andere ebenso wichtige noch folgen muß. Diese hoffe ich beim Verdrehungswinkel mit den mir zur Verfügung stehenden Mitteln später noch selbst leicht leisten zu können, während die Ausdehnung auf die Prüfung der Formeln (16) oder (17) viel mehr Arbeit machen wird, von der mir zweifelhaft ist, ob sie in meinem Laboratorium in absehbarer Zeit bewältigt werden kann.

Gewisse ungefähre Anhaltspunkte für die Zuverlässigkeit der Gl. (16) werden natürlich die zum Zwecke der Messung des Verdrehungswinkels anzustellenden Versuche ganz von selbst schon liefern. Außerdem wird man auch wohl annehmen dürfen, daß eine Bestätigung der Formel (11) für den Verdrehungswinkel durch die Versuche, ohne daß man dabei genötigt wäre, für den Berichtigungsfaktor ζ einen stärker von Eins abweichenden Wert einzusetzen, zugleich eine gewisse Gewähr dafür liefern würde, daß auch die auf der gleichen Grundlage beruhende Formel (16) nicht zu weit von der Wirklichkeit abweichende Werte liefern kann.

München, beim Jahreswechsel 1916/17.



Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenzkreise überall stetig ist.

Von **Leopold Fejér.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 3. Februar 1917.

Ich habe im Jahre 1909 mit Hilfe einer besonderen Methode Beispiele konstruiert, die für die Theorie der Fourierschen Reihe (und verwandter Reihen) gewisse grundlegende Aufschlüsse geben. Später habe ich gelegentlich bemerkt, daß meine Methode auch einige analogen Beispiele für die Theorie der Potenzreihe liefert. Vorliegende Arbeit soll nun vermittelst der Konstruktion neuer Beispiele zeigen, daß jene Methode in der Theorie der Potenzreihe ebensoweit führt, wie bei der Fourierreihe. Sie zeigt insbesondere, daß die auf das Polynom

$$\frac{z}{n}+\frac{z^2}{n-1}+\cdots+\frac{z^n}{1}-\frac{z^{n+1}}{1}-\cdots-\frac{z^{2n-1}}{n-1}-\frac{z^{2n}}{n}$$

gegründete „Klammermethode“ in der Tat überraschend fruchtbar ist.

1. Es sei $f(\Theta)$ eine reelle, durchweg stetige Funktion der reellen Veränderlichen Θ mit der Periode 2π.

Ich sage von der Fourierreihe von $f(\Theta)$, daß sie an der Stelle Θ die du Bois-Reymondsche Singularität aufweist, wenn sie an der Stelle Θ divergiert.

Ich sage von der Fourierreihe von $f(\Theta)$, daß sie an der Stelle Θ die Lebesguesche Singularität aufweist, wenn sie für jeden reellen Wert der Veränderlichen konvergiert, jedoch in keinem, die Stelle Θ in seinem Innern enthaltendem Intervalle gleichmäßig konvergiert.

2. Es sei nun

$$\varphi(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n + \cdots \tag{1}$$

eine Potenzreihe der komplexen Veränderlichen z mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Der Kreis $|z| = 1$ sei ihr Konvergenzkreis und die Summe $\varphi(z)$ der Reihe (1) sei im abgeschlossenen Konvergenzkreise $|z| \leqq 1$ stetig, d. h. es soll

$$\lim_{r=1} \varphi(re^{i\Theta}) \qquad (0 \leqq r < 1)$$

existieren und zwar gleichmäßig im Intervalle $0 \leqq \Theta \leqq 2\pi$. Ich frage:

1. Kann eine Potenzreihe (1) an einer Stelle des Konvergenzkreises die du Bois-Reymondsche Singularität haben?

Diese Frage ist, wie schon früher von mir gezeigt wurde, zu bejahen[1]).

2. Kann eine Potenzreihe (1) die Lebesguesche Singularität (in dem oben für die Fourierreihe definierten Sinne) haben?

Diese Frage ist ebenfalls zu bejahen. Das soll durch Konstruktion eines Beispiels zum erstenmale in § 1 bewiesen werden.

§ 1. Beispiel einer Potenzreihe, deren Summe für $|z| \leqq 1$ überall stetig ist, und die an der Stelle $z = 1$ die Lebesguesche Singularität aufweist.

3. Da ich mich hier auf meine früheren Arbeiten nicht stützen will, muß ich einiges vorausschicken.

Eine Bezeichnung. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ eine unendliche Reihe mit beliebigen komplexen Gliedern und

$$g_1, g_2, g_3 \cdots g_\nu \cdots$$

[1]) Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, Jahrg. 1910 dieser Sitzungsberichte; vgl. auch: Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, Annales de l'École Normale (3), 28 (1911). Später habe ich noch einen andern Beweis gefunden: s. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (Berlin 1916), § 3, S. 23–25. — Die Frage, ob eine Potenzreihe, deren Summe für $|z| \leqq 1$ überall stetig ist, an einer Stelle des Einheitskreises $|z| = 1$ die du Bois-Reymondsche Singularität aufweisen kann, rührt von Herrn A. Pringsheim her (s. meine oben zitierte Münchener Arbeit).

eine unendliche Folge von positiven ganzen Zahlen. Dann verstehe ich unter

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)_{g_\nu}$$

diejenige unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu ,$$

die aus der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dadurch hervorgeht, daß ich in ihr erst die ersten g_1 Glieder, dann die folgenden g_2 Glieder, ..., dann die folgenden g_ν Glieder ... zu einem Gliede zusammenziehe. In Formeln:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)_{g_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu ,$$

wo

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + u_2 + \cdots + u_{g_1}, \\ v_2 &= u_{g_1+1} + \cdots + u_{g_1+g_2}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_\nu &= u_{g_1+g_2+\cdots+g_{\nu-1}+1} + \cdots + u_{g_1+g_2+\cdots+g_\nu}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

4. Hilfssätze. *I. Hilfssatz.* Wenn $z = e^{i\Theta}$, wo $0 < \Theta < 2\pi$, so ist

$$(2) \qquad |z^{r+1} + z^{r+2} + \cdots + z^{r+p}| \leqq \frac{2}{|1-z|} = \frac{2}{|1-e^{i\Theta}|} = \frac{1}{\sin\frac{\Theta}{2}}$$

für $\quad r = 0, 1, 2 \cdots \infty; \quad p = 1, 2, 3 \cdots \infty.$

In der Tat ist dann

$$|z^{r+1} + z^{r+2} + \cdots + z^{r+p}| = |z^{r+1}|\,|1 + z + \cdots + z^{p-1}|$$

$$= \left|\frac{1-z^p}{1-z}\right| \leqq \frac{2}{|1-z|} = \frac{2}{|1-e^{i\Theta}|} = \frac{1}{\sin\frac{\Theta}{2}}.$$

II. Hilfssatz. Bedeuten überhaupt $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$ positive Zahlen, so daß entweder

a) $$L \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_p \geqq 0,$$

oder

b) $$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots < \lambda_p \leq L,$$

so ist

$$(3) \qquad |\lambda_1 z^{r+1} + \lambda_2 z^{r+2} + \cdots \lambda_p z^{r+p}| \leq \frac{2L}{|1-e^{i\Theta}|} = \frac{L}{\sin\frac{\Theta}{2}}$$

für
$$z = e^{i\Theta}, \qquad 0 < \Theta < 2\pi$$
$$r = 0, 1, 2, 3 \cdots \infty$$
$$p = 1, 2, 3 \quad \cdots \infty.$$

In der Tat, wenn

$$\sigma_1 = z^{r+1}$$
$$\sigma_2 = z^{r+1} + z^{r+2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\sigma_p = z^{r+1} + z^{r+2} + \cdots + z^{r+p}$$

gesetzt wird, erhält man im Falle a):

$$|\lambda_1 z^{r+1} + \lambda_2 z^{r+2} + \cdots + \lambda_p z^{r+p}| = |\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2(\sigma_2 - \sigma_1) + \cdots +$$
$$\lambda_p(\sigma_p - \sigma_{p-1})| = |\sigma_1(\lambda_1 - \lambda_2) + \sigma_2(\lambda_2 - \lambda_3) + \cdots + \sigma_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p)$$
$$+ \sigma_p \lambda_p| \leq \frac{2}{|1-e^{i\Theta}|}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_3 + \cdots + \lambda_{p-1} - \lambda_p + \lambda_p)$$
$$= \frac{2\lambda_1}{|1-e^{i\Theta}|} \leq \frac{2L}{|1-e^{i\Theta}|} = \frac{L}{\sin\frac{\Theta}{2}}.$$

Im Falle b):

$$|\lambda_1 z^{r+1} + \lambda_2 z^{r+2} + \cdots + \lambda_p z^{r+p}| = \left|z^{2r+p+1}\left(\frac{\lambda_p}{z^{r+1}} + \frac{\lambda_{p-1}}{z^{r+2}}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \cdots + \frac{\lambda_1}{z^{r+p}}\right)\right| = |\lambda_p \bar{z}^{r+1} + \lambda_{p-1}\bar{z}^{r+2} + \cdots + \lambda_1 \bar{z}^{r+p}|$$
$$< \frac{2L}{|1-e^{-i\Theta}|} = \frac{2L}{|1-e^{i\Theta}|} = \frac{L}{\sin\frac{\Theta}{2}}.$$

III. Hilfssatz. Es ist

$$(4) \qquad \left|\frac{z^{r+1}}{p} + \frac{z^{r+2}}{p-1} + \cdots + \frac{z^{r+p}}{1} - \frac{z^{r+p+1}}{1} - \frac{z^{r+p+2}}{2} - \cdots - \frac{z^{r+2p}}{p}\right| < 6$$

für den ganzen Einheitskreis

$$|z| = 1$$

und für $r = 0, 1, 2, 3 \cdots \infty;\quad p = 1, 2, 3 \cdots \infty.$

In der Tat ist für $z = e^{i\Theta}$, $0 \leqq \Theta \leqq 2\pi$,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{p} \frac{z^{r+p-\nu+1}}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{z^{r+p+\nu}}{\nu}\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{p} \frac{z^{r+p-\nu+1} - z^{r+p+\nu}}{\nu}\right|$$

$$= |z^{r+p+\frac{1}{2}}| \left|\sum_{\nu=1}^{p} \frac{z^{-(\nu-\frac{1}{2})} - z^{\nu-\frac{1}{2}}}{\nu}\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{p} \frac{e^{-i(\nu-\frac{1}{2})\Theta} - e^{i(\nu-\frac{1}{2})\Theta}}{\nu}\right|$$

$$= 2\left|\sum_{\nu=1}^{p} \frac{\sin(2\nu-1)\frac{\Theta}{2}}{\nu}\right| = 2\sum_{\nu=1}^{p} \frac{\sin(2\nu-1)\frac{\Theta}{2}}{\nu} \leqq 2\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$$

$$= \pi + 2 < 6.$$

5. Definition einer unendlichen Konstantenfolge. Man betrachte die Gruppe von $2n$ Zahlen

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2} \cdots -\frac{1}{n}.$$

Man bilde diese Zahlengruppe der Reihe nach für die folgenden Werte der positiven ganzen Zahl n:

$$n = 2^{1^3}, 2^{2^3}, 2^{3^3}, 2^{4^3} \ldots 2^{\nu^3} \ldots \tag{5}$$

Man schreibe die so erhaltenen Zahlengruppen der Reihe nach alle nebeneinander, nachdem man aber vorher die Zahlen der ν-ten Gruppe ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$) alle durch ν^2 dividiert hat. So entsteht eine ganz bestimmte unendliche Zahlenfolge

$$\frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4\cdot 2^8}, \frac{1}{4(2^8-1)}, \frac{1}{4(2^8-2)} \cdots \tag{6}$$

Diese unendliche Zahlenfolge bezeichne ich durch

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots a_k \ldots \tag{6}$$

6. Man betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots \tag{7}$$

Von dieser Potenzreihe habe ich bewiesen, daß ihre Summe im abgeschlossenen Kreise $|z| \leqq 1$ stetig ist, und dennoch für

$z=1$ divergiert, d. h. daß sie an dieser Stelle die du Bois-Reymondsche Singularität aufweist. (Ich erinnere daran, daß sie auf jedem Bogen $z=e^{i\Theta}$, $\varepsilon \leq \Theta \leq 2\pi-\varepsilon$ gleichmäßig konvergiert. Hier bedeutet ε eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl).

Nun möchte ich zeigen, wie man mit Hilfe der Reihe (7) zu einer neuen Potenzreihe gelangen kann, die bei $z=1$ die Lebesguesche Singularität besitzt.

Ich will nur noch für die Reihe (7) eine Benennung erklären. Es sei

$$g_1 = 2.2^{1^3}, \quad g_2 = 2.2^{2^3} \ldots g_\nu = 2.2^{\nu^3} \ldots$$

Dann nenne ich die ersten g_1 Glieder der Reihe (7) die „erste Gliedergruppe", die folgenden g_2 Glieder die „zweite Gliedergruppe" ..., die folgenden g_ν Glieder die „ν-te Gliedergruppe" ... Die Gesamtheit derjenigen Glieder der ν-ten Gliedergruppe, die positive Koeffizienten haben, nenne ich die „ν-te positive Gliedergruppe", die Gesamtheit derjenigen, die negative Koeffizienten haben, „die ν-te negative Gliedergruppe." Manchmal verstehe ich unter Gliedergruppe auch die Summe der Gruppenglieder. Es wird durch diesen doppelten Gebrauch des Wortes Gliedergruppe kein Mißverständnis entstehen [1]).

7. Man setze in die ν-te Gliedergruppe ($\nu=1, 2, 3\ldots$) der Potenzreihe (7) $e^{-\frac{i}{\nu}}z$ statt z, so entsteht eine neue Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k = b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_k z^k + \cdots, \tag{8}$$

die bei $z=1$ die Lebesguesche Singularität aufweist.

D. h. (α) ihre Summe ist im abgeschlossenen Kreisbereiche $|z| \leq 1$ überall stetig,

(β) sie ist in eben diesem Kreisbereiche $|z| \leq 1$ überall konvergent,

[1]) Vgl. die Nummern 3, 4, 5, 6 dieser Arbeit mit meiner in der Fußnote auf S. 34 zitierten französischen Arbeit.

(γ) und sie ist dennoch ungleichmäßig konvergent auf jedem Bogen des Einheitskreises $|z|=1$, der die Stelle $z=1$ in seinem Innern hat. —

(δ) Dagegen ist sie auf jedem Bogen $z=e^{i\Theta}$, $\varepsilon \leqq \Theta \leqq 2\pi-\varepsilon$ gleichmäßig konvergent. (Hier bedeutet ε eine beliebig keine, aber feste positive Größe).

Mit anderen Worten: die Lebesguesche Singularität tritt isoliert auf.

8. Beweis. Es sei $|z|<1$. Dann ist die Reihe (8) wegen $\lim\limits_{k=\infty} b_k = 0$ gewiß konvergent. Also ist ihre Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k = f(z) \qquad (|z|<1) \tag{8}$$

gewiß gleich der Summe der unendlichen Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right)_{g_\nu} \qquad (|z|<1) \tag{9}$$

Hier ist wieder $g_\nu = 2.2^{\nu^3}$, $(\nu=1, 2 \cdots \infty)$, und die Bezeichnung ist in Nr. 3 erklärt.

Die Reihe (9), deren Glieder Polynome von z sind, ist aber sogar für $|z| \leqq 1$ gleichmäßig konvergent. In der Tat ist, auf Grund von Nr. 5 und des Hilfssatzes III, das ν-te Glied der Reihe (9) für $|z|=1$ dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{6}{\nu^2}$. Die Reihe (9) ist also für $|z|=1$, und folglich auch für $|z| \leqq 1$ gleichmäßig konvergent. Ihre Summe für $|z|<1$, d. h. $f(z)$ ist also im abgeschlossenen Kreisbereiche $|z| \leqq 1$ stetig. Hiermit ist bewiesen, daß die Reihe (8) die Eigenschaft (α) besitzt.

9. Jetzt will ich beweisen, daß die Reihe (8) die Eigenschaft (β) besitzt, d. h. daß sie an jeder Stelle des Einheitskreises $|z|=1$ konvergiert.

Ich beweise erst, daß sie an der Stelle $z=1$ konvergiert.

Betrachten wir irgend eine Restsumme

$$R_{n,m} = b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m \tag{10}$$

der Reihe (8) für $z = 1$, d. h. der Reihe

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_k + \cdots \tag{11}$$

n und m sind beliebige positive ganze Zahlen, und es ist $n < m$. Ich zeige, daß

$$\lim_{n=\infty} R_{n,m} = 0. \tag{12}$$

Es gehöre das erste Glied b_n von $R_{n,m}$ der ν-ten, das letzte Glied b_m der μ-ten Gliedergruppe der Reihe (11) an. Hier sind ν und μ positive ganze Zahlen, und es ist $\nu \leq \mu$.

Ich zerlege nun $R_{n,m}$ in 5 Teile:

$$R_{n,m} = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_5. \tag{14}$$

Hier bedeutet ϱ_3 die Summe der

$$(\nu + 1)\text{-ten}, \; (\nu + 2)\text{-ten} \; \ldots \; (\mu - 1)\text{-ten} \tag{15}$$

Gliedergruppen der Reihe (11). (Wenn keine dieser Gliedergruppen vollständig in $R_{n,m}$ enthalten ist, so sei $\varrho_3 = 0$. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $\mu = \nu$, oder $\mu = \nu + 1$.) Jedenfalls ist also nach dem Hilfssatze III

$$|\varrho_3| < \frac{6}{(\nu+1)^2} + \frac{6}{(\nu+2)^2} + \cdots + \frac{6}{(\mu-1)^2} < 6\left(\frac{1}{(\nu+1)^2} + \frac{1}{(\nu+2)^2} + \cdots \text{ ad. inf.}\right) < \frac{6}{\nu}. \tag{16}$$

ϱ_1 bedeutet in (14) die ganze ν-te positive Gliedergruppe der Reihe (11), wenn sie ganz, und ein Fragment derselben, wenn nur ein Bruchteil von ihr in $R_{n,m}$ enthalten ist. (Es sei $\varrho_1 = 0$, wenn sie in $R_{n,m}$ ganz fehlt.) ϱ_1 ist also entweder gleich der ganzen Summe

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{e^{-\frac{i}{\nu}(r+1)}}{2^{\nu^3}} + \frac{e^{-\frac{i}{\nu}(r+2)}}{2^{\nu^3} - 1} + \cdots + \frac{e^{-\frac{i}{\nu}(r+2^{\nu^3})}}{1}\right), \tag{17}$$

oder einer Teilsumme oder auch $= 0$. (Hier bedeutet r eine gewisse nicht negative ganze Zahl, auf deren Wert es aber hier nicht ankommt.)

In jedem Falle ist also, auf Grund des Hilfssatzes II $\left(\text{mit } z = e^{-\frac{i}{\nu}}\right)$,

$$(18)\qquad \varrho_1 < \frac{2\cdot\frac{1}{\nu^2}}{\left|1-e^{-\frac{i}{\nu}}\right|} = \frac{1}{\nu^2}\,\frac{1}{\sin\frac{1}{2\nu}} < \frac{1}{\nu^2\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2\nu}} = \frac{\pi}{\nu}.$$

ϱ_2 bedeutet in (14) die ganze ν-te negative Gliedergruppe der Reihe (11), wenn sie ganz, und eine Teilsumme derselben, wenn nur ein Teil von ihr in $R_{n,m}$ enthalten ist. (Es sei $\varrho_2 = 0$, wenn sie in $R_{n,m}$ ganz fehlt.)

In jedem Falle ist, auf Grund des Hilfssatzes II, wieder

$$(19)\qquad |\varrho_2| < \frac{\pi}{\nu}.$$

Aus demselben Grunde ist

$$(20)\qquad |\varrho_4| < \frac{\pi}{\mu},\quad |\varrho_5| < \frac{\pi}{\mu},$$

wo ϱ_4, ϱ_5 dieselbe Bedeutung haben für die μ-te Gliedergruppe, wie ϱ_1, ϱ_2 für die ν-te Gliedergruppe. Also ist auf Grund von (14), (16), (18), (19), (20)

$$(21)\qquad |R_{n,m}| < \frac{\pi}{\nu} + \frac{\pi}{\nu} + \frac{6}{\nu} + \frac{\pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu} = \frac{2\pi+6}{\nu} + \frac{2\pi}{\mu} \leq \frac{4\pi+6}{\nu}.$$

Da aber $\lim \nu = +\infty$, wenn $\lim n = +\infty$, so ist

$$\lim_{n=\infty} R_{n,m} = 0.$$

Hiermit ist also die Beziehung (12), mithin auch die Konvergenz der Reihe (8) für $z = 1$ erwiesen.

10. Ich beweise ferner, daß die Reihe (8) auch an allen übrigen Stellen $z = e^{i\Theta}$, $(z \neq 1)$, konvergiert. Ich will aber gleichzeitig die Eigenschaft (δ) beweisen, d. h. zeigen, daß die Reihe (8) auf dem Bogen

$$(22)\qquad z = e^{i\Theta},\quad \varepsilon < \Theta \leq 2\pi - \varepsilon$$

sogar gleichmäßig konvergiert. Hier bedeutet ε eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl.

Die Bezeichnungen der Nr. 9 behalte ich bei, nur daß sie sich jetzt eben auf die Stelle $z = e^{i\Theta}$, und nicht auf die Stelle $z = 1$ beziehen.

Es sei also $R_{n,m}$ die Restsumme der Reihe (8) an der Stelle $z = e^{i\Theta}$, $0 < \varepsilon < \Theta < 2\pi - \varepsilon$. Diese zerlege ich wieder in die 5 Teile

$$R_{n,m} = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_5. \tag{23}$$

Es ist wieder

$$\varrho_3 < \frac{6}{\nu}. \tag{24}$$

und zwar nicht nur für $\varepsilon \leqq \Theta \leqq 2\pi - \varepsilon$, sondern überhaupt für jeden Wert von Θ.

ϱ_1 bedeutet in (23) die Summe

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{e^{-\frac{i}{\nu}(r+1)}\,e^{i(r+1)\Theta}}{2^{\nu^3}} + \frac{e^{-\frac{i}{\nu}(r+2)}\,e^{i(r+2)\Theta}}{2^{\nu^3}-1} + \cdots + \frac{e^{-\frac{i}{\nu}(r+2^{\nu^3})}\,e^{i(r+2^{\nu^3})\Theta}}{1}\right), \tag{25}$$

oder eine Teilsumme davon oder die Null. (r ist eine gewisse nicht negative ganze Zahl.)

Ist aber ν so groß, daß

$$\frac{1}{\nu} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{26}$$

dann ist, wegen (22),

$$\frac{\varepsilon}{2} < \Theta - \frac{1}{\nu} < 2\pi - \varepsilon < 2\pi - \frac{\varepsilon}{2},$$

und also auf Grund des Hilfssatzes II $\left(\text{mit } z = e^{i\left(\Theta - \frac{1}{\nu}\right)}\right)$ in jedem Falle

$$|\varrho_1| \leq \frac{2\cdot\frac{1}{\nu^2}}{\left|1 - e^{i\left(\Theta - \frac{1}{\nu}\right)}\right|} < \frac{2\cdot\frac{1}{\nu^2}}{\left|1 - e^{i\frac{\varepsilon}{2}}\right|} = \frac{1}{\nu^2 \sin\frac{\varepsilon}{4}} < \frac{2\pi}{\nu^2\varepsilon}. \tag{27}$$

So erhalte ich schließlich: Ist ν genügend groß, so ist für jede Stelle des Bogens

$$z = e^{i\Theta}, \quad \varepsilon < \Theta < 2\pi - \varepsilon,$$

$$(28) \qquad |R_{n,m}| < \frac{2\pi}{\nu^2 \varepsilon} + \frac{2\pi}{\nu^2 \varepsilon} + \frac{6}{\nu} + \frac{2\pi}{\mu^2 \varepsilon} + \frac{2\pi}{\mu^2 \varepsilon} \leq \left(6 + \frac{8\pi}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\nu}.$$

Da aber $\lim \nu = +\infty$, wenn $\lim n = +\infty$, also ist

$$(29) \qquad \lim_{n=\infty} R_{n,m} = 0,$$

und zwar gleichmäßig im Intervalle $\varepsilon \leq \Theta \leq 2\pi - \varepsilon$.

Hiermit ist für die Reihe (8) die Eigenschaft (β), aber auch die Eigenschaft (δ) vollständig erwiesen.

11. Schließlich werde ich noch zeigen, daß die Reihe (8) auf keinem Bogen des Einheitskreises gleichmäßig konvergieren kann, der die Stelle $z = 1$ in seinem Innern hat (Eigenschaft (γ)).

In der Tat, die ν-te positive Gliedergruppe der Reihe (8) (diese ist doch auch eine ihrer Restsummen) hat an der Stelle

$$(30) \qquad z_\nu = e^{\frac{i}{\nu}}$$

den Wert

$$(31) \qquad \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2^{\nu^3}} + \frac{1}{2^{\nu^3} - 1} + \cdots + 1\right).$$

Dieser müßte mit $\lim \nu = +\infty$ zu Null konvergieren, wenn die Reihe (8) auf einem, die Stelle $z = 1$ in seinem Innern enthaltenden Bogen des Kreises $|z| = 1$ gleichmäßig konvergieren würde. Dies ist aber nicht der Fall, denn die Summe (31) ist größer als

$$(32) \qquad \frac{1}{\nu^2} \log 2^{\nu^3} = \nu \log 2,$$

konvergiert also mit $\lim \nu = +\infty$ nicht gegen 0, sondern geradezu gegen $+\infty$.

Damit ist das Theorem von Nr. 7 vollständig bewiesen.

12. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ hat komplexe Koeffizienten. Will man eine Reihe mit denselben geforderten Eigenschaften, deren Koeffizienten sämtlich reell sind, so bilde man die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k + \bar{b}_k) z^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k. \tag{33}$$

Diese Potenzreihe hat lauter reelle Koeffizienten, und es ist auf Grund des Vorhergehenden sehr leicht einzusehen, daß sie alle geforderten Eigenschaften besitzt.

§ 2. Über die verschiedenen Möglichkeiten des Auftretens der Du Bois-Reymondschen und Lebesgueschen Singularität bei konjugierten Reihen.

13. Es sei

$$a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{34}$$

eine beliebige Potenzreihe, deren Summe für $|z| \leq 1$ stetig ist und die auf jedem Bogen $z = e^{i\Theta}$, $\varepsilon \leq \Theta \leq 2\pi - \varepsilon$, gleichmäßig konvergiert. (Hier bedeutet ε wieder eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl.) Sie soll aber nicht auf dem ganzen Einheitskreise $|z| = 1$ gleichmäßig konvergieren.

Betrachten wir die reelle und imaginäre Komponente der Potenzreihe (34) für $z = e^{i\Theta}$, d. h. die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n \cos n\Theta - \tau_n \sin n\Theta), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n \cos n\Theta + \sigma_n \sin n\Theta),$$

$$\sigma_n + i\tau_n = a_n, \quad n = 1, 2, 3 \cdots \infty.$$

Diese sind die Fourierreihen je einer überall stetigen und nach 2π periodischen reellen Funktion von Θ. Beide Reihen konvergieren gleichmäßig im Intervalle $\varepsilon \leq \Theta \leq 2\pi - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$.

Nun sind bei einer Potenzreihe wie (34) für die Stelle $\Theta = 0$ offenbar nur die folgenden 3 Fälle denkbar[1]):

1. Fall: die eine Komponente von (34) hat an der Stelle $\Theta = 0$ die du Bois-Reymondsche Singularität, und die andere Komponente hat an der Stelle $\Theta = 0$ die Lebesguesche Singularität;

[1]) Zwei weitere denkbare Fälle lassen sich leicht ausschließen.

2. Fall: beide Komponenten haben an der Stelle $\Theta = 0$ die du Bois-Reymondsche Singularität;

3. Fall: beide Komponenten haben an der Stelle $\Theta = 0$ die Lebesguesche Singularität.

Ich bin jetzt in der Lage, zu zeigen, daß alle 3 denkbare Fälle auch wirklich auftreten können.

Beweis. 1. Fall: dieser tritt bei der Reihe (7)

$$a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots \tag{7}$$

auf[1]).

2. Fall: dieser tritt bei der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + i) a_k z^k \tag{35}$$

auf. In der Tat ist die reelle Komponente der Potenzreihe (35) für $z = e^{i\Theta}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Theta - a_k \sin k\Theta), \tag{36}$$

und die imaginäre Komponente

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Theta + a_k \sin k\Theta). \tag{37}$$

Beide gehen für $\Theta = 0$ in die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ über, welche divergiert.

3. Fall: dieser tritt bei der Reihe (8), oder auch bei der Reihe

$$c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_k z^k + \cdots \tag{33}$$

auf. Würde nämlich die eine Komponente von (33) für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergieren, so müßte auch die andere Komponente von (33) für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergieren. (Das folgt aus meinem Satze: wenn die Summe einer Potenz-

[1]) Zum erstenmal bewiesen in meiner Note: Sur une paire de séries de Fourier conjuguées, C. R., Paris (28 février 1910); ausführlicher in meiner oben in der Fußnote auf S. 34 zitierten französischen Arbeit. Einen zweiten auf einem allgemeinen Satze über konjugierte trigonometrische Reihen beruhenden Beweis findet man in meiner Arbeit: Über konjugierte trigonometrische Reihen, Journ. f. Math., Bd. 144 (1914).

reihe für $|z| \leq 1$ stetig ist, und wenn eine ihrer Komponenten für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergiert, so konvergiert auch ihre andere Komponente für $|z| = 1$ gleichmäßig[1].) Es würde also die Potenzreihe (33) für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergieren, was aber nicht der Fall ist. Es müssen also beide Komponenten von (33) bei $\Theta = 0$ ungleichmäßig konvergieren, w. z. b. w.

§ 3. Über die im § 1 verwendete Methode; Verallgemeinerung derselben; weitere Anwendungen.

13. Die Reihe (8) habe ich aus der Reihe (7) dadurch erhalten, daß ich in ihre erste, zweite, ..., ν-te, ... Gliedergruppe statt z der Reihe nach

$$e^{-\frac{i}{1}} z, \quad e^{-\frac{i}{2}} z, \quad \ldots, \quad e^{-\frac{i}{\nu}} z, \quad \ldots \tag{38}$$

schrieb. Dieses Vorgehen gestattet die folgende Verallgemeinerung: Es sei

$$t_1, \; t_2, \; t_3, \; \ldots \; t_\nu, \; \ldots \tag{39}$$

eine beliebige Folge von reellen Zahlen, die alle dem Intervalle $0 \leq \Theta < 2\pi$ angehören. Man setze in die konsekutiven Gliedergruppen der Reihe (7)

$$a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots \tag{7}$$

statt z der Reihe nach

$$e^{-t_1 i} z, \quad e^{-t_2 i} z, \quad \ldots \quad e^{-t_\nu i} z, \quad \ldots \tag{40}$$

Die so entstehende Potenzreihe sei

$$u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_k z^k + \cdots \tag{41}$$

Von ihr kann — in dieser Allgemeinheit — nur gesagt werden: 1. ihre Summe ist für $|z| \leq 1$ stetig, 2. ist AB ein

---

[1]) S. die in der Fußnote auf S. 45 zitierte Arbeit „Über konjugierte trigonometrische Reihen“. Herr Marcel Riesz hat durch Anwendung einer originellen Methode diesen Satz auf einen Kreissektor verallgemeinert: „Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome“, Jahresb. der D. M. V. 23 (1914); s. insbesondere § 5.

solcher abgeschlossener Bogen des Einheitskreises, welcher in seinem Innern keine der Verdichtungsstellen der Punkte

$$e^{t_1 i}, \quad e^{t_2 i}, \quad \ldots \quad e^{t_\nu i}, \quad \ldots$$

hat, so konvergiert die Reihe (41) gleichmäßig auf jedem Teilbogen $A_1 B_1$ des Bogens AB, der durch zwei innere Punkte A_1, B_1 von AB begrenzt wird (zu den Verdichtungsstellen rechne ich auch einen Punkt $e^{t_m i}$, der in dieser Punktfolge unendlich oft auftritt); 3. die Reihe (41) konvergiert niemals gleichmäßig auf dem ganzen Einheitskreise $|z| = 1$.

Nehme ich z. B. $t_\nu = \frac{1}{\nu}$, so erhalte ich die Reihe (8), die ich in § 1 dieser Arbeit ausführlich untersucht habe.

(Es wäre wohl von Interesse, überhaupt den Fall $t_\nu = \frac{1}{\nu^\alpha}$, wo $\alpha > 0$, zu untersuchen.)

Ich erwähne noch das folgende Beispiel allgemeiner Natur. Es sei

$$\Theta_1, \; \Theta_2, \; \ldots \; \Theta_\nu, \; \ldots \tag{42}$$

eine beliebige gegebene Zahlenfolge, deren Glieder dem Intervalle $0 < \Theta < 2\pi$ angehören. Man setze

$$\begin{array}{lllll} t_1 = \Theta_1, & t_2 = \Theta_1, & t_3 = \Theta_2, & t_4 = \Theta_1, & t_5 = \Theta_2, \\ t_6 = \Theta_3, & t_7 = \Theta_1, & t_8 = \Theta_2, & t_9 = \Theta_3, & t_{10} = \Theta_4, \\ \ldots & & & & \end{array} \tag{43}$$

Die entsprechende Potenzreihe (41) ist dann an den vorgeschriebenen Stellen

$$e^{\Theta_1 i}, \quad e^{\Theta_2 i}, \quad \ldots \quad e^{\Theta_\nu i}, \quad \ldots \tag{44}$$

des Einheitskreises divergent, d. h. sie hat an diesen Stellen die du Bois-Reymondsche Singularität. Interessante spezielle Fälle: die Stellen (44) bedecken den ganzen Einheitskreis überall dicht, oder: sie bedecken die eine Hälfte des Einheitskreises überall dicht, lassen aber die andere Hälfte frei etc.

Die Einführung der unendlich vielen Parameter

$$t_1, \; t_2, \; \ldots \; t_\nu, \; \ldots$$

in die Reihe (7) scheint mir einen großen Nutzen zu bringen.

§ 4. Modifikation der in § I angewendeten Methode nach einer anderen Richtung. — Eine Anwendung.

14. Ich möchte noch von einer anderen Modifikation meiner Methode sprechen, die vielleicht auch Interesse verdient.

Ich bin von der Konstantenfolge

(6) $$a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots \; a_k, \; \ldots$$

ausgegangen, die in Nr. 5 definiert ist[1]).

Hier müßte die Zahl n die Werte

$$n = 2^{1^3}, \; 2^{2^3}, \; 2^{3^3}, \; 2^{4^3}, \; \ldots \; 2^{\nu^3}, \; \ldots$$

durchlaufen.

Ich verfahre nun genau so wie in Nr. 5, nur lasse ich jetzt n die Werte[2])

(44) $$n = 2^1, \; 2^2, \; 2^3, \; 2^4, \; \ldots \; 2^\nu, \; \ldots$$

durchlaufen. Ich erhalte so statt der Folge (6) die Folge

(45) $$A_1, \; A_2, \; A_3, \; \ldots \; A_k, \; \ldots,$$

$$A_1 = \frac{1}{2}, \; A_2 = 1, \; A_3 = -1, \; A_4 = -\frac{1}{2},$$

$$A_5 = \frac{1}{4.4}, \; A_6 = \frac{1}{4.3}, \; A_7 = \frac{1}{4.2}, \; A_8 = \frac{1}{4.1},$$

$$A_9 = -\frac{1}{4.1}, \; A_{10} = -\frac{1}{4.2}, \; \ldots$$

---

[1]) Die Konstantenfolge (6) findet sich schon in meiner Arbeit: Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, Journ. f. Math., 138 (1910); s. insbesondere S. 46, 47.

[2]) Der Gedanke, statt der Zahlen

$$2^{1^3}, \; 2^{2^3}, \; 2^{3^3}, \; \ldots \; 2^{\nu^3}, \; \ldots$$

gewisse andere zu wählen, ist schon in meiner in der Fußnote auf S. 34 zitierten französischen Arbeit kurz angedeutet. Daselbst (S. 99 Fußn.) proponiere ich (für gewisse Zwecke) die Folge

$$2^{1^2}, \; 2^{2^2}, \; 2^{3^2}, \; \ldots \; 2^{\nu^2}, \; \ldots$$

Vgl. hierzu auch Ch.-J. de la Vallée-Poussin: Cours d'Analyse infinitésimale, II (1912), p. 166—169. Der Vorteil, die Folge 2^{ν^3} durch gewisse andere ersetzen zu können, ist auch von Herrn Hardy benützt worden.

Betrachten wir nun die Potenzreihe

$$A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_k z^k + \cdots \tag{46}$$

Ich behaupte: die Potenzreihe (46) ist zwar für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergent (und folglich ist ihre Summe für $|z| \leq 1$ stetig), sie ist aber an keiner Stelle des Einheitskreises $|z| = 1$ absolut konvergent[1]).

Beweis. Ich benütze die alten Benennungen und Bezeichnungen, nur daß sich jetzt eben alles auf die Reihe (46) bezieht.

G. H. Hardy: On the summability of Fouriers series, Proceedings London Math. Soc. (2), 12, part 5; s. insbesondere Nr. 6, S. 371—372.

[1]) Beispiele von Potenzreihen, welche für $|z| = 1$ ausnahmslos und dennoch nicht absolut konvergieren, wurden zum erstenmal durch Herrn A. Pringsheim konstruiert. S. A. Pringsheim: „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise", Jahrg. 1900 dieser Sitzungsberichte; s. insbesondere § 3, S. 68—78. (Hier findet man auch die ältere Literatur.) Es ist aber noch heute unentschieden, ob es unter diesen Pringsheimschen Potenzreihen eine solche gibt, die eine für $|z| \leq 1$ überall stetige Summe hat. Die Frage nach einer Potenzreihe, deren Summe für $|z| \leq 1$ überall stetig ist, und die für $|z| \leq 1$ gleichmäßig, aber für $|z| = 1$ nicht absolut konvergiert, wurde mir im Jahre 1910 gesprächsweise durch Herrn H. Bohr gestellt. (Vgl. auch Pringsheim, l. c. S. 77.) Ich habe auf Grund meiner asymptotischen Darstellung von e_n vermutet, daß die Potenzreihe

$$\sqrt{1-z} \quad e^{\frac{1}{z-1}} = e_0 + e_1 z + \cdots e_n z^n + \cdots$$

diese Eigenschaft besitzt, was auch von Herrn Marcel Riesz durch Heranziehung eines bekannten Hardyschen Satzes alsbald erwiesen wurde. Später fanden die Herren Marcel Riesz und G. H. Hardy auf ganz anderer Grundlage äußerst elegante Beispiele dieser Art; s. G. H. Hardy: A Theorem concerning Taylors series, Quaterly Journal of Mathematics, Nr. 174 (1913), s. insbesondere Nr. 12, 13, 14, S. 157—160. (Auf S. 160, oben, steht ein offenbarer Druckfehler; es soll da heißen $\sqrt{1-x} \quad e^{\frac{1}{x-1}}$ statt $\sqrt{1-x} \quad e^{\frac{1}{1-x}}$.) Über das Hardysche Beispiel vgl. auch das in der Fußnote auf S. 34 zitierte Buch des Herrn Landau, § 14, S. 61: „Hardysches Beispiel". Im Texte wollte ich nun besonders zeigen, daß meine bereits zur Konstruktion zahlreicher anderer Beispiele dienliche Methode auch hier einfach zum Ziele führt.

(S. insbesondere Nr. 9.) Z. B. hat die ν-te Gliedergruppe in (46) nicht 2.2^{ν^3}, sondern 2.2^{ν} Gliedern.

Es sei $|z| = 1$, und es bezeichne $R_{n,m}$ die Restsumme von (46). Ich zerlege wieder in

$$R_{n,m} = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_5.$$

Nun ist aber für $|z| = 1$ (genau so wie in Nr. 9) $|\varrho_3| < \frac{6}{\nu}$.

Weiter ist für $|z| = 1$

$$|\varrho_1| < \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^\nu - 1} + \cdots + \frac{1}{1}\right) < \frac{1}{\nu^2}\log 2^\nu = \frac{\log 2}{\nu}$$

usw. Also ist

$$|R_{n,m}| < \frac{\log 2}{\nu} + \frac{\log 2}{\nu} + \frac{6}{\nu} + \frac{\log 2}{\mu} + \frac{\log 2}{\mu} \leq \frac{6 + 4\log 2}{\nu}, \text{ d. h.}$$

$$\lim_{n=\infty} R_{n,m} = 0$$

und zwar gleichmäßig für $|z| = 1$.

Die Reihe (46) ist also für den ganzen Einheitskreis $|z| = 1$ gleichmäßig konvergent.

Sie ist aber an keiner Stelle des Einheitskreises absolut konvergent, denn die Reihe

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| + \cdots \tag{47}$$

ist divergent. Würde sie nämlich konvergieren, so müßte auch die Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|\right)_{2.2^\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(2\,\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^\nu - 1} + \cdots + 1\right)\right)$$

konvergieren. Diese ist aber divergent, da ihr ν-tes Glied größer ist als

$$2 \cdot \frac{1}{\nu^2}\log 2^\nu = \frac{2\log 2}{\nu},$$

und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ divergiert.

Die beiden Geraden-Kugeltransformationen von Sophus Lie.

Von **Hans Beck.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 3. März 1917.

In seiner Abhandlung „Die Liesche Geraden-Kugeltransformation und ihre Verallgemeinerungen“ [1]) beklagt Herr H. Liebmann mit Recht, daß „keine der zahlreichen Darstellungen der Lieschen Geraden-Kugeltransformation die einfachen Gedankengänge der projektiven Geometrie scharf umrissen in den Vordergrund treten“ lasse. Dann leitet Herr Liebmann die beiden Lieschen Transformationen unter Weiterbildung eines von Reye angegebenen Verfahrens [2]) synthetisch ab.

Bei Lie werden die Punkte eines Raumes abgebildet, das einemal auf die Tangenten einer singularitätenfreien Fläche zweiter Ordnung („erste“ Transformation), das anderemal auf die Treffgeraden eines irreduziblen Kegelschnitts („zweite“ Transformation). Daraus folgt die Abbildung der Geraden des Raumes auf die Kugeln der (I) Nicht-Euklidischen und (II) Euklidischen Geometrie.

Damit ergibt sich nun aber die Möglichkeit, beide Fälle auf denselben Ursprung zurückzuführen. Erst dadurch fällt volles Licht auf die gegenseitigen Beziehungen der beiden Abbildungen.

Da der von Lie gegebene Formelapparat das nicht erkennen läßt, so geben wir im nachfolgenden eine Darstellung, die im wesentlichen analytischer Art ist, und insofern eine Ergänzung der Liebmannschen Arbeit bildet.

---

[1]) Sitzungsber. d. Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. 1915, S. 189—198.

[2]) Geometrie der Lage, Bd. 2, 3. Aufl., S. 185—187.

Im Gegensatz zu Liebmann beginnen wir mit dem sich auf die Nicht-Euklidische Geometrie beziehenden Fall (I) und vollziehen dann mit den Formeln (die der Verfasser bereits zu anderen Zwecken früher[1]) angegeben hat), den Grenzübergang zum Falle (II) der Euklidischen Geometrie.

Durch diese Behandlungsweise erst tritt die eigenartige Struktur des Geradenraumes klar zutage, in welchem sich ein Strahlsystem erster Ordnung und erster Klasse mit (I) getrennten oder (II) zusammenfallenden Leitlinien als von fundamentaler Bedeutung erweist.

Ausgedehntere Anwendungen, die zum Teil auf das Gebiet der schönen Berwaldschen Arbeit über die algebraisch rektifizierbaren Kurven im Nicht-Euklidischen Raum[2]) hinüberführen, haben wir nur andeutungsweise gestreift, zumal die demnächst erscheinende Studysche Arbeit darüber näheres enthalten wird.

1. **Grundfläche, Tangentenkomplex.** Die erste Liesche Transformation bildet die Punkte eines ersten Raumes („Punktraum") auf die Tangenten einer singularitätenfreien Fläche zweiter Ordnung eines zweiten Raumes („Bildraum") ab. Die Fläche heiße Grundfläche.

Ihre Gleichungen seien: in homogenen (Tetraeder-)Punktkoordinaten

$$x_0^2 - \varkappa^2 x_1^2 - \varkappa^2 x_2^2 - \varkappa^2 x_3^2 = 0, \qquad (\varkappa \neq 0)$$

also in homogenen Ebenenkoordinaten

$$\varkappa^2 \mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_2^2 - \mathfrak{x}_3^2 = 0.$$

Für eine Tangente der Grundfläche gelten die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 - \varkappa^2 \mathfrak{X}_{23}^2 - \varkappa^2 \mathfrak{X}_{31}^2 - \varkappa^2 \mathfrak{X}_{12}^2 = 0,$$

$$\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0,$$

wobei $\mathfrak{X}_{01} = x_0 y_1 - x_1 y_0 = \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_3 - \mathfrak{x}_3 \mathfrak{y}_2$ usw.

---

[1]) Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 64 (1912), S. 55. D. Math. Vgg. 22 (1913), S. 237–239.

[2]) Sitzungsber. der Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. 1916, S. 1–18.

Sie lassen sich sofort durch die beiden folgenden ersetzen:

$$(\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23})^2 + (\mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31})^2 + (\mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12})^2 = 0,$$
$$(\mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23})^2 + (\mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31})^2 + (\mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12})^2 = 0,$$

die sich in bekannter Weise allgemein befriedigen lassen:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23} = l^2 - m^2, && \mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23} = \lambda^2 - \mu^2,\\ (1)\quad &\mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31} = i(l^2 + m^2), && \mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31} = i(\lambda^2 + \mu^2),\\ &\mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12} = -2lm, && \mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12} = -2\lambda\mu. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Parameterdarstellung des Tangentenkomplexes der Grundfläche, und darin liegt bereits die erste Liesche Transformation.

Aus den Umkehrungen dieser Formeln

$$2l^2 = \mathfrak{X}_{01} + \varkappa\mathfrak{X}_{31} - i(\mathfrak{X}_{02} - \varkappa\mathfrak{X}_{23}),\quad 2lm = -\mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12},$$
$$2m^2 = -\mathfrak{X}_{01} + \varkappa\mathfrak{X}_{31} - i(\mathfrak{X}_{02} + \varkappa\mathfrak{X}_{23}),$$
$$2\lambda^2 = \mathfrak{X}_{01} - \varkappa\mathfrak{X}_{31} - i(\mathfrak{X}_{02} + \varkappa\mathfrak{X}_{23}),\quad 2\lambda\mu = -\mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12},$$
$$2\mu^2 = -\mathfrak{X}_{01} - \varkappa\mathfrak{X}_{31} - i(\mathfrak{X}_{02} - \varkappa\mathfrak{X}_{23})$$

lassen sich wegen der Homogenität der Plückerschen Koordinaten $\mathfrak{X}$ eindeutig die Verhältnisse $l:m$ und $\lambda:\mu$ berechnen, aber nicht $l:\lambda$, sondern nur $l^2:\lambda^2$. Behandelt man also die l, m, λ, μ als homogene Koordinaten eines Punktes im Punktraum, so werden der Tangente $\mathfrak{X}$ der Grundfläche durch die Formeln (1) zugeordnet die beiden Punkte des Punktraumes

$$l:m:\lambda:\mu \quad \text{und} \quad l:m:-\lambda:-\mu.$$

Zwei solche Punkte werden durch eine spezielle involutorische Kollineation des Punktraumes vertauscht. Wir nennen sie ein Punktepaar.

Satz 1. Durch die Formeln (1) wird jedem Punkte $l:m:\lambda:\mu$ des Punktraumes eindeutig eine Tangente $\mathfrak{X}$ der Grundfläche zugeordnet; umgekehrt entsprechen aber einer Tangente der Grundfläche zwei Punkte des Punktraumes, die ein Paar bilden.

2. **Struktur des Punktraumes.** Verbindet man die beiden Punkte eines jeden Paares miteinander, so erhält man für die ∞^3 Punktepaare nicht ∞^3, sondern nur ∞^2 Verbindungsgerade,

die eine lineare Kongruenz mit getrennten Leitgeraden bilden. Diese Leitgeraden haben die Koordinaten

$$1:0:0:0:0:0 \quad \text{„Erste" Leitgerade,}$$
$$0:0:0:1:0:0 \quad \text{„Zweite" Leitgerade.}$$

Die Verbindungsgerade des Paares (als getrennt vorausgesetzter Punkte) $l:m:\pm\lambda:\pm\mu$ hat die Koordinaten

$$p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12} = 0:l\lambda:l\mu:0:-m\mu:m\lambda \tag{2}$$

und trifft die erste Leitgerade im Punkte $l:m:0:0$, die zweite in $0:0:\lambda:\mu$.

Die lineare Kongruenz kann also durch die beiden Gleichungen dargestellt werden

$$p_{01} = 0, \quad p_{23} = 0,$$

und erweist sich somit als Durchschnitt der ∞^1 Gewinde im Büschel

$$e^{\varkappa\varrho} p_{01} - e^{-\varkappa\varrho} p_{23} = 0. \tag{3}$$

Legt man ϱ einen bestimmten Wert bei, so stellt (3) „das Gewinde (ϱ)" dar; das Gewinde (0) soll auch Hauptgewinde genannt werden, das Gewinde $\left(\frac{\pi i}{2\varkappa}\right)$ Nebengewinde[1].

Die beiden Punkte eines Paares liegen also auf einer Kongruenzgeraden und werden durch die Leitgeraden harmonisch getrennt.

Unter einem Geradenpaar ist demnach zu verstehen das System

$$(p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12}), \quad (-p_{01}, p_{02}, p_{03}, -p_{23}, p_{31}, p_{12}),$$

unter einem Ebenenpaar das System der beiden Ebenen

$$(u_0:u_1:u_2:u_3) \quad \text{und} \quad (u_0:u_1:-u_2:-u_3).$$

Paare mit zusammenfallenden Elementen sind danach nur:

a) die Punkte einer jeden Leitgeraden,
b) die Ebenen durch eine Leitgerade,
c) die Leitgeraden und die Kongruenzgeraden.

[1] Von umfassenderem Standpunkt aus erscheint das letztgenannte Gewinde als das wichtigere.

Beachten wir noch, daß im Bildraum die Erzeugenden der Grundfläche die Bedingungen erfüllen:

$$\mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23} = 0, \quad \mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31} = 0, \quad \mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12} = 0.$$

„Erste Schar".

$$\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23} = 0, \quad \mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31} = 0, \quad \mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12} = 0.$$

„Zweite Schar".

Dann können wir Satz 1 dahin ergänzen:

Satz 2. Den Punkten der ersten Leitgeraden im Punktraum sind zugeordnet die Erzeugenden erster Schar der Grundfläche.

3. **Paare zusammenfallender Geraden.** Als Ort von ∞^1 Punkten muß sich eine Gerade (ein Paar von solchen) auf einen Regulus von Tangenten der Grundfläche abbilden. Diese speziellen Reguli nennen wir, vorläufig unmotiviert, sphärische Reguli und haben dann den freilich noch erst mit sachlichem Inhalt anzufüllenden

Satz 3. Ein Geradenpaar des Punktraumes wird auf einen sphärischen Regulus im Bildraum abgebildet.

Zuerst betrachten wir im Punktraum eine Leitgerade. Aus Satz 2 folgt sofort

Satz 4. Das Bild der zweiten Leitgeraden des Punktraums ist der Regulus der Erzeugenden zweiter Schar der Grundfläche.

Sodann bilden wir das Paar getrennter Punkte $l:m:\pm\lambda:\pm\mu$ und die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden mit den Leitgeraden $l:m:0:0$ und $0:0:\lambda:\mu$ ab. Das gibt zwei Erzeugende der Grundfläche und eine nicht erzeugende Tangente. Diese drei Geraden des Bildraumes schneiden sich zu zweien. Am unmittelbarsten sieht man das, wenn man die Inzidenzbedingung für die beiden Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ so schreibt:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23})(\mathfrak{Y}_{01} + i\varkappa\mathfrak{Y}_{23}) + (\mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31})(\mathfrak{Y}_{02} + i\varkappa\mathfrak{Y}_{31}) \\ + (\mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12})(\mathfrak{Y}_{03} + i\varkappa\mathfrak{Y}_{12}) \\ = (\mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23})(\mathfrak{Y}_{01} - i\varkappa\mathfrak{Y}_{23}) + (\mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31})(\mathfrak{Y}_{02} - i\varkappa\mathfrak{Y}_{31}) \\ + (\mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12})(\mathfrak{Y}_{03} - i\varkappa\mathfrak{Y}_{12}).\end{aligned}$$

Daher muß die dritte Tangente durch den Schnittpunkt der beiden Erzeugenden laufen:

Satz 5. *Den Punktepaaren einer Kongruenzgeraden im Punktraum sind zugeordnet die Tangenten der Grundfläche in einer Tangentialebene (in einem ihrer Punkte).*

Oder:

Satz 6. *Eine Kongruenzgerade im Punktraum bildet sich auf eine Tangentialebene der Grundfläche ab.*

Die Tangentialebene ist dabei als Regulus von Tangenten aufzufassen. Es wäre auch möglich gewesen, als Bild der Kongruenzgeraden zu erklären den Berührungspunkt jener Tangentialebene; auch dieser wäre dann als Regulus aufzufassen (vgl. Satz 11, 12).

Die Ebene, die der Kongruenzgeraden (2) nach Satz 6 zugeordnet ist, heißt

$$\mathfrak{x}_0:\mathfrak{x}_1:\mathfrak{x}_2:\mathfrak{x}_3 = l\mu - m\lambda : \varkappa(l\lambda - m\mu) : \varkappa i(l\lambda + m\mu) : - \varkappa(l\mu + m\lambda), \tag{4}$$

so daß zwischen Kongruenzgeraden im Punktraum und Tangentialebenen der Grundfläche die *ein-eindeutige* Beziehung besteht:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_0:\mathfrak{x}_1:\mathfrak{x}_2:\mathfrak{x}_3 &= (p_{03} - p_{12}) : \varkappa(p_{02} + p_{31}) : \varkappa i(p_{02} - p_{31}) : - \varkappa(p_{03} + p_{12}), \\ p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12} &= 0 : \mathfrak{x}_1 - i\mathfrak{x}_2 : \varkappa\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_3 : 0 : \mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{x}_2 : - \varkappa\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_3. \end{aligned} \tag{5}$$

4. **Paare zusammenfallender Ebenen.** Die Ebene $u_0:u_1:u_2:u_3$ des Punktraumes laufe durch die erste Leitgerade, d. i. es sei $u_0 = u_1 = 0$. Sie trifft dann die zweite Leitgerade in einem bestimmten Punkte. Durch diesen läuft ein ebenes Büschel von Kongruenzgeraden, und alle Punktepaare der Ebene werden so gewonnen. Die ∞^2 Bildtangenten der Grundfläche verteilen sich also auf ∞^1 Tangentialebenen, die alle eine Erzeugende zweiter Art gemeinsam haben. In jeder dieser ∞^1 Tangential-

ebenen liegen ∞^1 Bildtangenten. Sie bilden eine quadratische Kongruenz, die aber reduzibel ist und eine doppelt zählende lineare Kongruenz des Tangentenkomplexes mit zusammenfallenden Leitgeraden darstellt. Da es andere lineare Kongruenzen im Tangentenkomplex der Grundfläche nicht gibt, haben wir

Satz 7. Den ∞^2 Punktepaaren einer Ebene des Punktraumes, die durch die erste Leitgerade verläuft, sind die ∞^2 Tangenten der Grundfläche in den Punkten einer Erzeugenden der zweiten Schar zugeordnet.

Satz 8. Den $2 \cdot \infty^1$ Ebenen des Punktraumes, die eine Leitgerade enthalten, werden zugeordnet die im Tangentenkomplex der Grundfläche verlaufenden $2 \cdot \infty^1$ linearen Kongruenzen.

Der analytische Apparat ist in dem allgemeineren enthalten, den wir bei der Abbildung von Paaren getrennter Ebenen entwickeln werden. Vgl. 9.

5. **Paare getrennter Geraden.** Wir gehen zunächst analytisch vor. Damit Allgemeingültigkeit erzielt wird, werden wir zum Teil doppelte Formeln nötig haben. So bereits bei der Aufgabe, die Punktreihe auf der abzubildenden Geraden p anzugeben. Diese wird durch die beiden Darstellungen geliefert

$$(6) \qquad \begin{aligned} &p_{01}\sigma_1 : p_{01}\sigma_2 : p_{02}\sigma_2 - p_{12}\sigma_1 : p_{03}\sigma_2 + p_{31}\sigma_1, \\ &p_{03}\tau_1 - p_{02}\tau_2 : -p_{31}\tau_1 - p_{12}\tau_2 : p_{23}\tau_1 : p_{23}\tau_2, \end{aligned}$$

die im allgemeinen Falle $p_{01}p_{23} \neq 0$, wo die Gerade p also keine Leitgerade trifft, vermöge $\tau_1 : \tau_2 = p_{02}\sigma_2 - p_{12}\sigma_1 : p_{03}\sigma_2 + p_{31}\sigma_1$ miteinander äquivalent sind. Im besonderen Falle, wo p etwa die zweite Leitgerade trifft ($p_{01} = 0$, $p_{23} \neq 0$), sind sie das nicht mehr; die eine Darstellung versagt, die andere bleibt brauchbar.

Setzen wir diese Werte aus (6) für l, m, λ, μ in (1) ein, so haben wir damit eine Parameterdarstellung des sphärischen Bildregulus. Von den beiden Formelsystemen setzen wir nur das eine her:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{X}_{01}+i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= (p_{03}^2-p_{31}^2)\tau_1^2+(-p_{02}p_{03}-p_{31}p_{12})2\tau_1\tau_2+(p_{02}^2-p_{12}^2)\tau_2^2,\\
\mathfrak{X}_{02}+i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= i(p_{03}^2+p_{31}^2)\tau_1^2+i(-p_{02}p_{03}+p_{31}p_{12})2\tau_1\tau_2+i(p_{02}^2+p_{12}^2)\tau_2^2,\\
\mathfrak{X}_{03}+i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= +2p_{03}p_{31}\tau_1^2+(p_{03}p_{12}-p_{02}p_{31})2\tau_1\tau_2-2p_{02}p_{12}\tau_2^2,
\end{aligned}
$$

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{X}_{01}-i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= p_{23}^2(\tau_1^2-\tau_2^2),\\
\mathfrak{X}_{02}-i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= p_{23}^2\,i(\tau_1^2+\tau_2^2),\\
\mathfrak{X}_{03}-i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= p_{23}^2\cdot -2\tau_1\tau_2.
\end{aligned}
$$

Aus den Formeln oben lassen sich τ_1^2, $2\tau_1\tau_2$, τ_2^2 eindeutig ausrechnen. Setzt man die dafür gefundenen Werte unten ein, so erhält man für den Regulus drei lineare Gleichungen. Der gesuchte sphärische Regulus besteht demnach als Schnitt dreier Gewinde aus den Erzeugenden der einen (der) Schar einer Fläche zweiter Ordnung. Das gilt auch noch in den beiden Sonderfällen.

Durch den Punkt $\sigma_1:\sigma_2$ $(\tau_1:\tau_2)$ der Geraden p (vgl. (6)) läuft die Kongruenzgerade (in den beiden Sonderfällen je eine Ausnahme):

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&0:\sigma_1(p_{02}\sigma_2-p_{12}\sigma_1):\sigma_1(p_{03}\sigma_2+p_{31}\sigma_1):0:-\sigma_2(p_{03}\sigma_2+p_{31}\sigma_1):\\
&\qquad\sigma_2(p_{02}\sigma_2-p_{12}\sigma_1).\\
&0:\tau_1(p_{03}\tau_1-p_{02}\tau_2):\tau_2(p_{03}\tau_1-p_{02}\tau_2):0:\tau_2(p_{31}\tau_1+p_{12}\tau_2):\\
&\qquad-\tau_1(p_{31}\tau_1+p_{12}\tau_2).
\end{aligned}
$$

Jeder der so erhaltenen ∞^1 Kongruenzgeraden entspricht eine nach (5) zu bildende Tangentialebene. Diese ∞^1 Tangentialebenen laufen sämtlich durch den Punkt

$$
(9)\qquad -\varkappa(p_{03}-p_{12}):p_{02}+p_{31}:i(p_{02}-p_{31}):-(p_{03}+p_{12}).
$$

Wie man durch Bildung des Ausdrucks

$$
x_0^2-\varkappa^2x_1^2-\varkappa^2x_2^2-\varkappa^2x_3^2,
$$

der für den Punkt (9) den Wert $2\varkappa^2p_{01}p_{23}$ hat, erkennt, liegt der Punkt (9) für den allgemeinen Fall niemals auf der Grundfläche, dagegen immer in den beiden Sonderfällen, wo die Gerade p eine Leitgerade trifft.

In jeder Tangentialebene der Grundfläche durch den Punkt (9) liegt nun eine einzige Regulusgerade. Da sie Tangente der Grundfläche ist und Erzeugende einer andern Fläche zweiter

Ordnung, so berühren sich diese beiden Flächen längs der Ebene, deren Pol in bezug auf die Grundfläche der Punkt (9) ist.

Damit steht aber die Form der Gleichung der vom Bildregulus (7) umhüllten Fläche zweiter Ordnung fest bis auf einen nur noch von den p abhängigen Faktor, der aus dem Büschel berührender Flächen die richtige heraushebt. Den findet man am bequemsten durch Spezialisierung; man wählt irgend eine Gerade des Regulus (7) und stellt die Bedingung dafür auf, daß sie ganz in der Fläche liegt.

So gewinnen wir für die vom Regulus (7), dem Bilde der Geraden p des Punktraumes umhüllte Fläche zweiter Ordnung die Gleichung

$$(10)\quad \begin{aligned}&(p_{01}+p_{23})^2(x_0^2-\varkappa^2x_1^2-\varkappa^2x_2^2-\varkappa^2x_3^2)-\{(p_{03}-p_{12})x_0\\&+\varkappa(p_{02}+p_{31})x_1+\varkappa i(p_{02}-p_{31})x_2-\varkappa(p_{03}+p_{12})x_3\}^2=0,\end{aligned}$$

und diese gilt in allen, auch den bisher schon betrachteten Fällen.

6. **Paare von Treffgeraden einer Leitgeraden.** Es soll die erste Leitgerade von der Geraden p getroffen werden, also $p_{23}=0$, $p_{01}\neq 0$. Dann ist es zweckmäßig, zu setzen:

$$p_{02}=p_2q_1,\quad p_{03}=p_3q_1,\quad p_{31}=-p_3q_2,\quad p_{12}=p_2q_2.$$

Dadurch tritt die Eigenart dieses Falles in den Formeln am klarsten hervor. Weder p_2 und p_3, noch q_1 und q_2 können dann gleichzeitig verschwinden.

Die beiden Geraden des Paares können mit der ersten Leitgeraden durch eine Ebene verbunden werden. Nach Satz 8 liegt der zugehörige sphärische Regulus in einer der linearen Kongruenzen, die der Tangentenkomplex der Grundfläche enthält. Er besitzt eine Erzeugende erster Art der Grundfläche; alle Regulusgeraden treffen eine Erzeugende zweiter Art. Diese beiden Erzeugenden bilden, doppelt zählend, den vollständigen Durchschnitt der vom Regulus umhüllten Fläche mit der Grundfläche; sie laufen durch den Punkt (9), der jetzt der Grundfläche angehört. Die Fläche (10) liegt also jetzt mit der Grundfläche in Osculation.

Die ∞^1 Tangentialebenen, in denen die Regulusgeraden verlaufen, gehen durch den Punkt (9), aber sie bilden jetzt ein Ebenenbüschel.

Satz 9. Einem Paare gerader Linien im Punktraum, welche nur die erste Leitgerade treffen, ist zugeordnet der Regulus von Erzeugenden einer mit der Grundfläche in Osculation liegenden Fläche zweiter Ordnung, der eine Erzeugende der ersten Schar der Grundfläche enthält.

Geht man von einer durch ihre Gleichung in Punktkoordinaten gegebenen Fläche zweiter Ordnung aus, so verlangt die Unterscheidung der beiden Reguli auf ihr die Adjunktion einer Quadratwurzel. Insofern darf man von einer orientierten Fläche zweiter Ordnung sprechen, wenn man nur die eine Schar ihrer Erzeugenden meint. Dieser Orientierungsprozeß hat also rein projektiven Charakter.

7. **Paare von Nullgeraden.** Jede Gerade, die nicht einer der bisher beschriebenen Arten angehört, ist Nullgerade eines bestimmten Gewindes (ϱ), in dem auch die andere Gerade des Paares liegt. Die Fläche (10) läßt sich vermöge (3) so umgestalten, daß ϱ darin auftritt $(p_{01} + p_{23} = (e^{2\varkappa\varrho} + 1)\, p_{01})$.

Diese Fläche wird nun singulär für $p_{01} + p_{23} = 0$ und $p_{01} - p_{23} = 0$. Im ersten Falle gehört die Gerade p des Punktraumes dem Nebengewinde $\left(\frac{\pi i}{2\varkappa}\right)$, im zweiten Falle dem Hauptgewinde an:

Satz 10. Einem Paare von Geraden des Punktraumes, die Nullgeraden sind, ohne dem Hauptgewinde oder Nebengewinde anzugehören, ist zugeordnet die eine Schar von Erzeugenden einer singularitätenfreien Fläche zweiter Ordnung, die die Grundfläche längs eines irreduziblen Kegelschnitts berührt.

Eine solche Fläche trägt aber zwei Reguli von Erzeugenden, die nach 6 als zueinander entgegengesetzt zu bezeichnen sind. Die diesem zweiten Regulus zugeordneten Geraden des Punktraumes findet man einfach durch Vertauschung

von p_{01} und p_{23}. Gehörte die ursprüngliche Gerade dem Gewinde (ϱ) an, so liegt die neue im Gewinde ($-\varrho$); beide Gerade sind konjugierte Polare in bezug auf das Hauptgewinde[1]). Denn die Korrelation (das Nullsystem), welches mit dem Gewinde (ϱ) verbunden ist, läßt sich so schreiben:

$$p'_{01} = e^{-2\varkappa\varrho} p_{23}, \quad p'_{02} = p_{02}, \quad p'_{03} = p_{03}, \quad p'_{23} = e^{2\varkappa\varrho} p_{01},$$
$$p'_{31} = p_{31}, \quad p'_{12} = p_{12}.$$

Die Größe ϱ kann, insofern sie die beiden Reguli auf der Fläche unterscheidet, zur Orientierung der Fläche verwandt werden (sie ist transzendente absolute Simultaninvariante der beiden Gewinde (ϱ) und (0) gegenüber Kollineationen und spielt im Gewindebüschel eine ähnliche Rolle wie sonst die Entfernungen zweier Punkte oder die Winkel gerader Linien).

Eine andere Paarung unserer Reguli wird durch das Polarsystem der Grundfläche vermittelt. Zwei Tangenten der Grundfläche, die konjugierte Polaren in bezug auf die Grundfläche sind, entsprechen Punktepaaren des Punktraumes

$$l : m : \pm\lambda : \pm\mu \quad \text{und} \quad l : m : \pm i\lambda : \pm i\mu.$$

Dabei sind die Gewinde (ϱ) und $\left(\varrho + \frac{i\pi}{2\varkappa}\right)$ des Punktraums gepaart, insonderheit das Hauptgewinde und das Nebengewinde.

8. **Haupt- und Nebengewinde.** Die beiden jetzt noch ausstehenden Fälle erledigen sich leicht. Man liest alles Wünschenswerte ohne weiteres aus (10) ab.

Satz 11. Einem Paare von Geraden des Nebengewindes im Punktraum sind zugeordnet ∞^1 Tangenten der Grundfläche, die eine Ebene erfüllen. Diese wird zur Tangentialebene, sobald das Geradenpaar des Punktraumes überdies der Kongruenz angehört.

Ebenso folgt sofort:

Satz 12. Einem Paare von Geraden des Hauptgewindes im Punktraum sind zugeordnet die Tangenten

[1]) Und auch (bei anderer Zuordnung) in bezug auf das Nebengewinde.

der Grundfläche durch einen Punkt. Dieser liegt auf der Grundfläche, sobald das Geradenpaar des Punktraumes überdies der Kongruenz angehört.

Damit haben wir sechs (acht) Familien sphärischer Reguli. Die Zusammenfassung aller dieser Gestalten unter gemeinsamen Namen führt zu folgendem Satze:

Satz 13. Geraden Linien des Punktraumes, die sich schneiden (ohne einem Paare anzugehören) entsprechen sphärische Reguli, die eine Erzeugende gemeinsam haben, also, wenn man will, sich berührende orientierte Flächen.

9. **Paare getrennter Ebenen.** Jede Ebene $u_0 : u_1 : u_2 : u_3$ eines solchen Paares enthält eine einzige Kongruenzgerade, auf der die Nullpunkte von u in bezug auf die Gewinde (ϱ) liegen. Wir brauchen nur ihren Nullpunkt in bezug auf das Hauptgewinde, der die Koordinaten $u_1 : -u_0 : -u_3 : u_2$ hat. Jeder andere Punkt der Ebene u liegt auf einer einzigen Nullgeraden (0). Alle Bildtangenten der Grundfläche verteilen sich daher auf ∞^1 Tangentialkegel (und eine Tangentialebene), und diese haben sämtlich eine (im Gegensatz zu 4) nicht erzeugende Tangente gemeinsam:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= u_1^2 - u_0^2, & \mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= i(u_1^2 + u_0^2),\\
& & \mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= +2u_1u_0,\\
\mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= u_3^2 - u_2^2, & \mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= i(u_3^2 + u_2^2),\\
& & \mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= +2u_3u_2.
\end{aligned}$$

Satz 14. Einem Ebenenpaar im Punktraum sind zugeordnet die ∞^2 Tangenten der Grundfläche, die eine von ihnen treffen (und diese selbst). Letztere ist Erzeugende, wenn das Paar zusammenfallende Ebenen besitzt.

Der Satz ist dual zu den Sätzen 1 und 2, und hätte ebenfalls als Ausgangspunkt benutzt werden können.

10. **Nicht-Euklidische Geometrie.** Bis dahin haben wir uns völlig im Gedankenkreise der projektiven Geometrie bewegt.

Bei weiterer Durchführung arbeitet der sprachliche Ausdruck zu schwerfällig. Dem begegnet man durch die Terminologie der Nicht-Euklidischen Geometrie, wobei also sachlich zu dem bisherigen nichts hinzugefügt wird, eine Bemerkung, die auch heute noch nicht überflüssig ist. Aber dann wirkt das suggestive Moment und führt von da aus leichter zu neuen Tatsachen.

Die Punkte der Grundfläche und ebenso ihre Erzeugenden heißen demgemäß unendlich fern, die übrigen Tangenten der Grundfläche isotrop (Minimalgerade), alle sonstigen geraden Linien anisotrop. Als anisotrop werden auch die Ebenen bezeichnet, die die Grundfläche nicht berühren, als isotrop (Minimalebenen) ihre Tangentialebenen.

Ferner legen wir dem Raume das Krümmungsmaß $-\varkappa^2$ bei, so daß als „Entfernung" der beiden Punkte x und y erklärt wird eine Größe (x, y), wo

$$\cos^2 h\, \varkappa (x, y) = (x|y)^2 : (x|x)\,(y|y). \tag{11}$$

Natürlich ist sie dadurch noch nicht eindeutig gegeben. Die Bedeutung der Symbole ist:

$$(x|y) = x_0 y_0 - \varkappa^2 x_1 y_1 - \varkappa^2 x_2 y_2 - \varkappa^2 x_3 y_3 .$$

Da wir den genauen Geltungsbereich unserer Sätze angegeben haben, fassen wir uns jetzt kurz. Es entsprechen sich

Punktraum:	Nicht-Euklidischer Raum:
Punkt der zweiten Leitgeraden.	Unendlich ferne Gerade zweiter Art.
Punkt (Paar).	Minimalgerade.
Erste Leitgerade.	Regulus der unendlich fernen Geraden erster Art.
Kongruenzgerade.	Minimalebene = unendlich ferner Punkt.
Treffgerade der ersten Leitgeraden (Paar).	Orientierte Horosphäre mit einer unendlich fernen Geraden erster Art (Grenzkugel).

Gerade des Nebengewindes (Paar).	Anisotrope Ebene.
Gerade im Hauptgewinde (Paar).	Minimalkegel = im Endlichen gelegener Punkt.
Nullgerade (ϱ) (Paar).	Orientierte Kugel vom „Radius" (ϱ).

Nur diese sphärischen Reguli, nicht aber die fünf (sieben) vorhergehenden, lassen sich als Kugeln ansehen[1]). Um das einzusehen, nennen wir den Punkt (9) jetzt y. Dann wird (10) zu

$$(p_{01} + p_{23})^2 (x\,x) - \varkappa^2 (x\,|\,y)^2 = 0.$$

Endlich wird $(y\,y) = 4\varkappa^2 p_{01} p_{23}$, worauf aus (11) folgt: $(x, y) = \pm\varrho$.

Zwei getrennte Punkte können immer durch eine einzige Gerade verbunden werden.	Zwei Minimalgerade (unendlich ferne Gerade) können stets durch einen einzigen sphärischen Regulus verbunden werden.

Der Satz rechts behält seinen Sinn, wenn die beiden Punkte links einem Paare angehören:

Drei getrennte Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, können durch eine einzige Ebene verbunden werden.	Es gibt eine einzige Minimalgerade (oder unendlich ferne) Gerade, die drei gegebene gleichzeitig trifft.

Auch hier gelten entsprechende Bemerkungen, wie vorhin.

Endlich bemerken wir, daß zwei wohlgeordneten unendlich fernen Punkten zugeordnet sind zwei wohlgeordnete Kongruenzgerade im Punktraum. Von da aus kommt man zum Studyschen Prinzip der sphärischen Bilder eines Speeres (einer Geraden) im Nicht-Euklidischen Raum.

11. Kurven eines Nullsystems. Die geschilderten Zusammenhänge werden sich in erster Linie für die Nicht-Euklidische Geometrie verwerten lassen. Daß aber auch die projek-

[1]) Liebmann, a. a. O., S. 196.

tive Geometrie Nutzen daraus ziehen kann, zeigen wir an einem Beispiel. Es entsprechen sich

Kurve (Punktort),	Mongesche Fläche als Ort von Minimalgeraden,
Dieselbe als Geradenort,	Dieselbe als Ort „berührender" sphärischer Reguli,
Kurve im Nebengewinde,	Tangentenregulus einer unendlich fernen Kurve,
Krumme Kurve im Hauptgewinde,	Tangentenregulus einer Minimalkurve,
Komplexkurve (ϱ).	(Orientierte) Serretsche Fläche (ϱ).

Wir verbinden nun den Pol der Ebene (4), also den unendlich fernen Punkt im Nicht-Euklidischen Raum

$$(12) \quad -\varkappa(l\mu - m\lambda) : l\lambda - m\mu : i(l\lambda + m\mu) : -(l\mu + m\lambda)$$

mit einem zweiten solchen, der der Kongruenzgeraden $l^* : m^* : \pm\lambda^* : \pm\mu^*$ des Punktraumes zugeordnet ist. Das gibt die Verbindungsgerade

$$(13) \quad \begin{aligned}
\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= 2\varkappa(\lambda\mu^* - \lambda^*\mu)(ll^* - mm^*), \\
\mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= -2\varkappa(lm^* - l^*m)(\lambda\lambda^* - \mu\mu^*), \\
\mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= 2\varkappa(\lambda\mu^* - \lambda^*\mu)\, i(ll^* + mm^*), \\
\mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= -2\varkappa(lm^* - l^*m)\, i(\lambda\lambda^* + \mu\mu^*), \\
\mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= 2\varkappa(\lambda\mu^* - \lambda^*\mu)\cdot -(lm^* + ml^*), \\
\mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= -2\varkappa(lm^* - l^*m)\cdot -(\lambda\mu^* + \mu\lambda^*).
\end{aligned}$$

Bedeuten jetzt l, m, λ, μ analytische Funktionen einer Veränderlichen t mit gemeinsamem Existenzbereich, die nicht sämtlich Konstante sein, und von denen weder die beiden ersten noch die beiden letzten zugleich identisch verschwinden dürfen, so stellt das System (12) die allgemeinste unendlich ferne analytische Kurve im Nicht-Euklidischen Raum dar[1]). Aus (13)

[1]) Vorausgesetzt ist dabei endlich, daß die vier Funktionen keinen gemeinsamen von t abhängigen Faktor besitzen.

finden wir, falls sie nicht eine Gerade ist $(l(t):m(t) = c_1:c_2$ oder $\lambda(t):\mu(t) = \gamma_1:\gamma_2)$ ihren Tangentenregulus:

$$
(14) \quad
\begin{aligned}
\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= (\lambda\mu' - \mu\lambda')(l^2 - m^2), \\
\mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= (\lambda\mu' - \mu\lambda')\, i(l^2 + m^2), \\
\mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= (\lambda\mu' - \mu\lambda') \cdot -2lm, \\
\mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= -(lm' - ml')(\lambda^2 - \mu^2), \\
\mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= -(lm' - ml')\, i(\lambda^2 + \mu^2), \\
\mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= -(lm' - ml') \cdot -2\lambda\mu,
\end{aligned}
$$

wo die Akzente Differentiation nach t bedeuten.

Dieser Regulus ist nun nach (1) Bild der Kurve im Punktraum (des Kurvenpaares)

$$\sqrt{\lambda\mu' - \mu\lambda'}\, l : \sqrt{\lambda\mu' - \mu\lambda'}\, m : i\sqrt{lm' - ml'}\, \lambda : i\sqrt{lm' - ml'}\, \mu$$

und damit haben wir die allgemeinste Komplexkurve im Nebengewinde erhalten.

Den störenden Faktor i beseitigen wir durch die absolute Korrelation im Nicht-Euklidischen Raume (vgl. 7). Man hat dazu in (14) das Vorzeichen Minus rechts in den drei letzten Formeln fortzulassen. Das gibt dann die Tangentenreguli der Minimalkurven und die Minimalkegel. Im Punktraum sind zugeordnet die Kurven

$$(15) \quad \sqrt{\lambda\mu' - \mu\lambda'}\, l : \sqrt{\lambda\mu' - \mu\lambda'}\, m : \sqrt{lm' - ml'}\, \lambda : \sqrt{lm' - ml'}\, \mu,$$

und damit ist die allgemeinste Komplexkurve im Hauptgewinde erhalten. Sie läßt sich einfacher schreiben, wobei dann aber immer unzählig viele Kurven verloren gehen; wir setzen etwa

$$l = 1, \quad m = \varphi(t), \quad \lambda = 1, \quad \mu = t,$$

und erhalten inhomogen für die Kurven des Gewindes

$$(16) \qquad dx = y\,dz - z\,dy$$

die integralfreie reelle Darstellung

$$(16) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \sqrt{\varphi'(t)}, \quad z = t\sqrt{\varphi'(t)}$$

vermöge einer einzigen willkürlichen Funktion, während bei

Lie Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, S. 236 bis 237 noch deren fünf auftreten. Hier darf φ nicht konstant sein; für $\varphi(t) = a + bt : c + dt$ werden die Nullgeraden dargestellt ($ad - bc \neq 0$).

Von hier aus erhalten wir sehr leicht die Kurven im Gewinde ϱ

$$(17) \qquad x = e^{-2\varkappa\varrho}\varphi(t), \quad y = \sqrt{\varphi'(t)}, \quad z = t\sqrt{\varphi'(t)}$$

und überhaupt durch projektive Transformation die Kurven in jedem nicht ausgearteten Gewinde.

Vermöge (1) folgen aus (16) die Tangentenflächen der Minimalkurven, aus (17) die Serretschen Flächen und ($\varrho = \varrho(t)$) überhaupt die Mongeschen Flächen des Nicht-Euklidischen Raumes, ohne irgend einen Integrationsprozeß. Um diese Gebilde als Punktörter darzustellen, hat man nur noch ausführbare Prozesse nötig, die keinerlei Schwierigkeiten darbieten.

12. **Grenzübergang zur zweiten Lieschen Transformation.** Wir nehmen jetzt mit unseren grundlegenden Formeln (1) eine Umgestaltung vor, die auf eine Kollineation im Punktraum hinauskommt. Dadurch werden wir in die Lage versetzt, ohne der Sache Schaden zu tun, zur Grenze $\varkappa^2 = 0$ überzugehen, d. i. die zweite Liesche Abbildung zu erhalten.

Wir setzen also in (1):

$$(18) \qquad \begin{aligned} l &= \xi_0 + i\varkappa\xi_2, \quad & m &= \xi_1 + i\varkappa\xi_3, \\ \lambda &= \xi_0 - i\varkappa\xi_2, \quad & \mu &= \xi_1 - i\varkappa\xi_3. \end{aligned}$$

Dadurch gehen die Formeln (1) über in

$$(19)[1] \qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{01} &= \xi_0^2 - \xi_1^2 - \varkappa^2(\xi_2^2 - \xi_3^2), & \mathfrak{X}_{23} &= 2(\xi_0\xi_2 - \xi_1\xi_3), \\ \mathfrak{X}_{02} &= i(\xi_0^2 + \xi_1^2) - i\varkappa^2(\xi_2^2 + \xi_3^2), & \mathfrak{X}_{31} &= 2i(\xi_0\xi_2 + \xi_1\xi_3), \\ \mathfrak{X}_{03} &= -2\xi_0\xi_1 - \varkappa^2 \cdot -2\xi_2\xi_3, & \mathfrak{X}_{12} &= -2(\xi_0\xi_3 + \xi_1\xi_2). \end{aligned}$$

Das Gewinde (ϱ) erhält die Gleichung ($\pi_{i\varkappa} = \xi_i\eta_\varkappa - \xi_\varkappa\eta_i$):

$$(20) \qquad -\frac{i}{\varkappa}\,\mathrm{tg}h\,\varkappa\varrho(\pi_{01} - \varkappa^2\pi_{23}) + \pi_{03} - \pi_{12} = 0,$$

---

[1]) Leipz. Ber. 64 (1912), S. 55.

das Nebengewinde wird zu $\pi_{01} - \varkappa^2 \pi_{23} = 0$, das Hauptgewinde zu $\pi_{03} - \pi_{12} = 0$. Die beiden Leitgeraden heißen in den Koordinaten π:

$$-\varkappa^2 : 0 : -i\varkappa : 1 : 0 : i\varkappa \text{ und } -\varkappa^2 : 0 : i\varkappa : 1 : 0 : -i\varkappa.$$

Diese Formeln haben für $\varkappa^2 \neq 0$ genau denselben Inhalt wie die bisherigen. Aber sie leisten mehr, denn sie behalten noch Sinn für $\varkappa^2 = 0$.

1. Die Grundfläche artet aus in

$$x_0^2 = 0, \quad \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 = 0,$$

also in einen irreduziblen Kegelschnitt (Grundkegelschnitt).

2. Das Gewinde (ϱ) wird zu

$$-i\varrho\pi_{01} + \pi_{03} - \pi_{12} = 0. \tag{20a}$$

3. Das Nebengewinde artet aus: $\pi_{01} = 0$.
4. Die Kongruenz erhält zusammenfallende Leitgerade.
5. Die Formeln (19) werden zu

$$(21)^{1)} \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{01} &= \xi_0^2 - \xi_1^2, & \mathfrak{X}_{23} &= 2(\xi_0\xi_2 - \xi_1\xi_3), \\ \mathfrak{X}_{02} &= i(\xi_0^2 + \xi_1^2), & \mathfrak{X}_{31} &= 2i(\xi_0\xi_2 + \xi_1\xi_3), \\ \mathfrak{X}_{03} &= -2\xi_0\xi_1, & \mathfrak{X}_{12} &= -2(\xi_0\xi_3 + \xi_1\xi_2), \end{aligned}$$

und stellen die Treffgeraden des Grundkegelschnitts dar, d. i. diejenigen Geraden, die seiner Ebene fremd sind, und ihn treffen, also nicht mehr den ganzen Komplex $\mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 = 0$.

13. **Zweite Liesche Abbildung.** Wir haben jetzt die Formeln (21) zu deuten. Sie vermitteln eine Abbildung jetzt der Treffgeraden des Grundkegelschnitts auf den Punktraum.

1. Jeder Treffgeraden des Grundkegelschnitts ist ein einziger Punkt des Punktraumes zugeordnet, also nicht mehr ein Punktepaar. Wegen $\mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 = 0$ haben nämlich die drei Quotienten

---

[1] A. a. O. und D. Math. Vgg. 22 (1913), S. 237.

$$\mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{12} - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{31} : \mathfrak{X}_{01} = \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{23} - \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{12} : \mathfrak{X}_{02} = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{31} - \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{23} : \mathfrak{X}_{03}$$

denselben Wert, den wir $\mathfrak{X}_{00}$ nennen wollen. Ferner ist dann

$$\mathfrak{X}_{00}^2 + \mathfrak{X}_{23}^2 + \mathfrak{X}_{31}^2 + \mathfrak{X}_{12}^2 = 0.$$

Den Gleichungen (21) ist dann hinzuzufügen

$$\mathfrak{X}_{00} = 2i(\xi_1\xi_2 - \xi_0\xi_3),$$

und jetzt lassen sich aus (21) die ξ eindeutig herstellen:

$$\begin{aligned}\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 &= 2(\mathfrak{X}_{01} - i\mathfrak{X}_{02}) : -2\mathfrak{X}_{03} : \mathfrak{X}_{23} - i\mathfrak{X}_{31} : -\mathfrak{X}_{12} + i\mathfrak{X}_{00} \\ &= 2\mathfrak{X}_{03} : 2(\mathfrak{X}_{01} + i\mathfrak{X}_{02}) : \mathfrak{X}_{12} + i\mathfrak{X}_{00} : \mathfrak{X}_{23} + i\mathfrak{X}_{31}.\end{aligned}$$

2. Jedem Punkte ξ des Punktraumes, für den nicht $\xi_0 = \xi_1 = 0$ ist, ist eine Treffgerade des Grundkegelschnitts zugeordnet.

3. Bei der durch (21) vermittelten Abbildung des Punktraumes auf den speziellen quadratischen Komplex $\mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 = 0$ treten mithin als singuläre Elemente auf:

a) im Punktraum: Die Punkte der Leitgeraden (∞^1);

b) im Bildraum: Die Geraden in der Ebene des Grundkegelschnitts (∞^2).

Für alle übrigen Stellen ist die Abbildung ein-eindeutig. (Vgl. hierzu 15.)

4. Bei den Einzelheiten der Abbildung modifizieren sich diejenigen Tatsachen gegen früher, die mit den beiden Leitgeraden und dem Nebengewinde in Beziehung standen. Wir stellen wieder die wichtigsten Tatsachen in einer Tafel auf:

Punktraum:	Bildraum:
Punkt.	Treffgerade des Grundkegelschnitts.
Punkte auf einer Geraden des Nebengewindes.	Treffgerade desselben Punktes des Grundkegelschnitts.
Punkte einer Kongruenzgeraden.	Die zuvor genannten Treffgeraden liegen in einer Tangentialebene des Grundkegelschnitts.
Kongruenzgerade.	Tangentialebene.

Gerade des Nebengewindes.	Ein Büschel von Treffgeraden in einer Nicht-Tangentialebene.
Gerade des Hauptgewindes.	Alle Treffgeraden durch einen der Kegelschnittebene fremden Punkt.
Nullgerade (ϱ) ($\varrho \neq 0$).	Die eine Schar von Erzeugenden einer singularitätenfreien Fläche zweiter Ordnung, die den Grundkegelschnitt enthält.
Nullgerade ($-\varrho$).	Die andere Schar.
Krumme Kurve im Nebengewinde.	Unebener Treffgeradenkegel, dessen Scheitel auf dem Grundkegelschnitt liegt.
Ebene durch die Leitgerade.	Bündel von Treffgeraden.
Sonstige Ebene.	Alle Treffgeraden, die eine solche schneiden.

14. **Euklidische Geometrie.** Diese rein projektiven Tatsachen lassen sich nun wieder bequemer ausdrücken, wenn man sich der Sprache der Geometrie bedient, deren Metrik sich auf den Grundkegelschnitt als absolutes Gebilde gründet; das ist aber bei geeigneter Deutung der Koordinaten die Euklidische Geometrie. So erhalten wir:

Punktraum:	Euklidischer Raum:
Punkt.	Minimalgerade.
Punkte auf einer Geraden des Nebengewindes.	Parallele Minimalgerade.
Punkte einer Kongruenzgeraden.	Doppelt parallele Minimalgerade.
Kongruenzgerade.	Minimalebene.
Gerade des Nebengewindes.	Orientierte Ebene.
Gerade des Hauptgewindes.	Minimalkegel = Punkt.
Nullgerade (ϱ).	Orientierte Kugel vom „Radius“ ϱ.

Hier gibt es also nur vier Arten sphärischer Reguli. Ihre Beziehungen zu den Geraden des Punktraumes können selbst-

ständig entwickelt werden, indessen liefert bereits unser Grenzübergang alles Wünschenswerte. Infolge von (18) ist

$$
\begin{aligned}
&p_{01}+p_{23}=2(\pi_{01}-\varkappa^2\pi_{23}), \quad p_{01}-p_{23}=2i\varkappa(\pi_{03}-\pi_{12}),\\
(22)\quad &p_{02}+p_{31}=-2i\varkappa(\pi_{02}+\pi_{31}), \; p_{02}-p_{31}=-2i\varkappa(\pi_{02}-\pi_{31}),\\
&p_{03}+p_{12}=-2i\varkappa(\pi_{03}+\pi_{12}), \; p_{03}-p_{12}=2(\pi_{01}+\varkappa^2\pi_{23}).
\end{aligned}
$$

Die dem Geradenpaare des Punktraumes

$$(\pi_{01}:\pi_{02}:\pi_{03}:\pi_{23}:\pi_{31}:\pi_{12}), \quad (\varkappa^2\pi_{23}:\pi_{02}:\pi_{12}:\varkappa^{-2}\pi_{01}:\pi_{31}:\pi_{03})$$

zugeordnete Fläche (10) wird zu

$$
\begin{aligned}
&\{\pi_{01}-\varkappa^2\pi_{23}\}^2(x_0^2-\varkappa^2x_1^2-\varkappa^2x_2^2-\varkappa^2x_3^2)+\{i(\pi_{01}+\varkappa^2\pi_{23})x_0\\
&\quad+\varkappa^2(\pi_{02}+\pi_{31})x_1+\varkappa^2 i(\pi_{02}-\pi_{31})x_2-\varkappa^2(\pi_{03}+\pi_{12})x_3\}^2\\
(23)\quad &\qquad\qquad=0.
\end{aligned}
$$

Der Punkt (9) wird zu

$$(24)\quad -i(\pi_{01}+\varkappa^2\pi_{23}):\pi_{02}+\pi_{31}:i(\pi_{02}-\pi_{31}):-(\pi_{03}+\pi_{12}).$$

Diese Entwicklungen gelten wieder für beide Liesche Transformationen in ganz gleicher Weise. Indessen wird man die Formel (23) für $\varkappa^2=0$ nicht so stehen lassen. Wir führen mit ihr den Grenzübergang aus und entwickeln dazu nach Potenzen von $\varkappa^2$. Dabei fallen die Glieder mit $\varkappa^0$ fort, so daß sich ein Faktor $\varkappa^2$ beseitigen läßt. Dann liefert der Grenzübergang nach Abspaltung von π_{01}:

$$
\begin{aligned}
&4\pi_{23}x_0^2-2ix_0\{(\pi_{02}+\pi_{31})x_1+i(\pi_{02}-\pi_{31})x_2-(\pi_{03}+\pi_{12})x_3\}\\
(25)\quad &\qquad+\pi_{01}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=0.
\end{aligned}
$$

Gehört die Gerade π des Punktraumes (die andere Gerade des Paares ist mit der übrig gebliebenen Leitgeraden $0:0:0:1:0:0$ zusammengefallen) dem Nebengewinde an ($\pi_{01}=0$), so bleibt (außer dem nur durch die Art des Grenzüberganges hinein gekommenen Faktor x_0) übrig:

$$2i\pi_{23}x_0+(\pi_{02}+\pi_{31})x_1+i(\pi_{02}-\pi_{31})x_2-(\pi_{03}+\pi_{12})x_3=0.$$

Wegen $\pi_{02}\pi_{31}+\pi_{03}\pi_{12}$ ist diese Ebene anisotrop (Euklidisch), so lange $\pi_{03}-\pi_{12}$ nicht verschwindet. Der zugehörige Regulus besteht aus der einen Schar von Minimalgeraden in

ihr, insofern liegt eine orientierte Ebene vor, was natürlich durch eine Gleichung in Punktkoordinaten nicht zum Ausdruck gebracht werden kann. Ist π Kongruenzgerade ($\pi_{01} = \pi_{03} - \pi_{12} = 0$), so wird die Ebene isotrop (Minimalebene); der Regulus ist das eine einzige Büschel von Minimalgeraden in ihr.

Im Falle $\pi_{01} \neq 0$ stellt (25) eine Kugel vom Radiusquadrat $-(\pi_{03} - \pi_{12})^2 : \pi_{01}^2 = \varrho^2$ (nach (20a)) dar, die also, falls π dem Hauptgewinde $\pi_{03} - \pi_{12} = 0$ angehört, zu einem Minimalkegel wird. Der Mittelpunkt der Kugel (des Minimalkegels) ergibt sich aus (24), wenn man darin $\varkappa^2 = 0$ setzt. Ist der Radius von Null verschieden, so besteht der zugehörige Regulus nur aus einer einzigen Schar von Erzeugenden der Fläche (23). Diese erhält man aus (19), wenn man darin (vgl. (6)) setzt

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \pi_{01}\sigma_1 : \pi_{01}\sigma_2 : \pi_{02}\sigma_2 - \pi_{12}\sigma_1 : \pi_{03}\sigma_2 + \pi_{31}\sigma_1 .$$

Die Formeln (19), (20), (23), (24) gelten also in gleicher Weise für beide Liesche Transformationen.

15. **Abbildung des Gewindes auf eine Punktmannigfaltigkeit.** Der leitende Gedanke der bisherigen Ausführungen bestand darin, daß die Punkte (Punktepaare) des Punktraumes abgebildet wurden auf die geraden Linien gewisser spezieller quadratischer Komplexe. Eine andere Behandlung hätte von den Punkten des Bildraums ausgehen können, die auf die Geraden (Geradenpaare) eines nicht ausgearteten Gewindes im Punktraum bezogen werden. Hierdurch kommt man zu einem anders gearteten Zusammenhang zwischen den beiden Lieschen Transformationen. Der Grundgedanke kommt bereits bei F. Klein im Erlanger Programm vor. Wir wollen dazu die analytischen Entwicklungen geben, die auch erkennen lassen, warum wir den von uns eingenommenen Standpunkt für vorteilhafter halten.

In einem Raum von vier Dimensionen seien $\xi_\omega : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ homogene Punktkoordinaten. Wir setzen

$$\begin{aligned} \xi_\omega : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = i(\pi_{01} - \varkappa^2\pi_{23}) : -i(\pi_{01} + \varkappa^2\pi_{23}) : \\ \pi_{02} + \pi_{31} : i(\pi_{02} - \pi_{31}) : -(\pi_{03} + \pi_{12}), \qquad (\varkappa \neq 0) \end{aligned} \tag{26}$$

wo die π Plückersche Linienkoordinaten sind.

Es folgt

$$-\xi_\omega^2 + \xi_0^2 - \varkappa^2 \xi_1^2 - \varkappa^2 \xi_2^2 - \varkappa^2 \xi_3^2 = -\varkappa^2 (\pi_{03} - \pi_{12})^2,$$

$$\pi_{01}:\pi_{02}:\pi_{03}:\pi_{23}:\pi_{31}:\pi_{12} = i(\xi_0 - \xi_\omega):\xi_1 - i\xi_2 : -\xi_3 : \varkappa^{-2} i(\xi_0 + \xi_\omega): \xi_1 + i\xi_2 : -\xi_3 .$$

Durch diese Formeln sind die Geraden eines nicht ausgearteten Gewindes (unseres bisherigen Grundgewindes) lückenlos umkehrbar eindeutig bezogen auf die Punkte einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung M_3^2, die im Raum von vier Dimensionen verläuft, singularitätenfrei ist und die Gleichung hat

$$-\xi_\omega^2 + \xi_0^2 - \varkappa^2 \xi_1^2 - \varkappa^2 \xi_2^2 - \varkappa^2 \xi_3^2 = 0. \tag{27}$$

Den Geraden eines Paares entsprechen die Punkte auf der M_3^2

$$\xi_\omega:\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3 \quad \text{und} \quad -\xi_\omega:\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3.$$

Die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte läuft durch den Punkt $1:0:0:0:0$, der der M_3^2 nicht angehört. Sie trifft den R_3 $\xi_\omega = 0$ im Punkte $0:\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3$, d. i.

$$\begin{aligned} \xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3 = -i(\pi_{01} + \varkappa^2 \pi_{23}):\pi_{02} + \pi_{31}: \\ i(\pi_{02} - \pi_{31}): -(\pi_{03} + \pi_{12}). \end{aligned} \tag{28}$$

Dieser Punkt, den wir mit (24) identifizieren, ist also dem Punktepaare $\pm \xi_\omega:\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3$ der M_3^2 und somit dem Geradenpaare des Grundgewindes zugeordnet (Erste Liesche Transformation).

Das Wentliche ist, daß wir die Punkte der M_3^2 in einen R_3 projiziert haben von einem Punkte aus, der ihr nicht angehört. Daher mußte die Abbildung (1—2)deutig werden.

Um zum Grenzfalle der zweiten Lieschen Transformation zu gelangen, dürfen wir nun nicht etwa $\varkappa^2$ gegen Null konvergieren lassen. Denn dann würde die M_3^2 stark singulär werden und hätte nicht mehr den Zusammenhang des Gewindes.

Vielmehr haben wir dazu das Projektionszentrum auf der M_3^2 anzunehmen, also gewissermaßen stereographisch zu projizieren. Demgemäß verbinden wir alle Punkte der M_3^2 mit dem Punkte $1:1:0:0:0$ (der der übrig bleibenden, doppelt

zählenden Leitgeraden $0:0:0:1:0:0$ entspricht. Seine Verbindungsgerade mit $\xi_\omega:\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3$ trifft den R_3 $\xi_\omega = 0$ im Punkte

$$(29) \quad 0 : -2\pi_{01} i : \pi_{02} + \pi_{31} : i(\pi_{02} - \pi_{31}) : -(\pi_{03} + \pi_{12}).$$

Damit ist also ein Punkt der M_3^2, mithin eine einzige Gewindegerade einem Punkte des R_3 zugeordnet. Diese Zuordnung ist umkehrbar, so lange $\pi_{01} \neq 0$. Ist aber $\pi_{01} = 0$, so wird $\xi_0 - \xi_\omega = 0$. Die Verbindungsgerade eines solchen Punktes mit dem Projektionszentrum ist Erzeugende der M_3^2. Alle Punkte einer solchen werden auf denselben Punkt des R_3 geworfen:

$$0:0:\xi_1:\xi_2:\xi_3 \quad (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0).$$

D. i. die ∞^2 Punkte der M_3^2 auf dem Erzeugendenkegel durch das Projektionszentrum bilden sich auf die ∞^1 Punkte eines irreduziblen Kegelschnitts im R_3 ab, ausgenommen das Projektionszentrum selbst, dessen Bild im R_3 völlig unbestimmt wird. Wir haben also

M_3^2	→ Gewinde	→ R_3
Projektionszentrum	→ Leitgerade	→ unbestimmt
Punkt auf einer Erzeugenden (∞^1)	→ Kongruenzgerade (∞^1)	→ ein Punkt auf einem Kegelschnitt
Sonstiger Punkt	⇄ Sonstige Gewindegerade	⇄ Punkt, der Kegelschnittebene fremd.

Die Umkehrung dieser Abbildung verhält sich etwas anders:

R_3	→ Gewinde	→ M_3^2
Punkt des Kegelschnitts	→ ∞^1 Kongruenzgerade	→ ∞^1 Punkte
∞^2 sonstige Punkte der Kegelschnittebene	→ Leitgerade	→ Projektionszentrum
Sonstiger Punkt	⇄ Gewindegerade	⇄ Punkt.

Vgl. hierzu die Ausführungen in 13.

Geht man nun mit dem Punkte (28) zur Grenze $\varkappa^2 = 0$ über, so erhält man den Punkt (29) nicht unmittelbar, sondern erst nach einer sehr einfachen Kollineation des R_3.

In dieser Unstimmigkeit erblicken wir den Beweis dafür, daß der von uns eingeschlagene Weg zweckmäßiger ist.

Kohäsion, Leitvermögen und Kristallstruktur.

Von **A. Johnsen** in Kiel.

Mit zwei Textfiguren.

Vorgelegt von P. v. Groth in der Sitzung am 3. März 1917.

Inhalt: Einleitung. Spaltung und Struktur. Translation und Struktur. Leitvermögen und Struktur. Schlußfolgerungen. Zusammenfassung.

Einleitung.

Bravais' Vermutung, daß die Spaltungsflächen ein Maximum der Netzdichte $\frac{1}{F}$ aufweisen, trifft nach den röntgenometrischen Ergebnissen nur in 50% der Fälle zu. So liegen in Diamant, Flußspat, Kalkspat, Natronsalpeter und Dolomit parallel den Spaltungsebenen diejenigen primitiven Parallelogramme, deren Inhalt F ein Minimum ist; dagegen gilt solches nicht für Steinsalz, Sylvin, Bleiglanz, Zinkblende und Rotkupfererz. Überdies enthält eine Atomgitterebene der Schar (hkl) im allgemeinen mehrere Atomnetze sowie eine andere Anzahl von Atomnetzen als eine andere Atomgitterebene der gleichen Schar. Danach scheint Spaltbarkeit durch die Qualitäten und die gegenseitige Orientierung der Atome derart bedingt zu sein, daß Spaltung parallel (hkl) nicht zwischen zwei beliebigen, sondern nur zwischen zwei bestimmten Atomgitterebenen der Schar (hkl) eintreten kann. Ähnliches dürfte für Translation gelten.

Mit derartigen Erwägungen ist die Deutung im Einklang, welche J. Stark[1]) der Spaltbarkeit und der Translations-

[1]) J. Stark, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 12, 279, 1915.

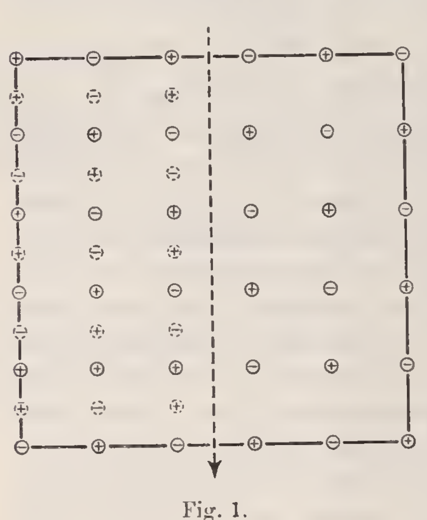
fähigkeit des Steinsalzes gegeben hat, indem er *Na*- und *Cl*-Ionen annahm und die Änderung ihrer elektrostatischen Kräfte während sehr kleiner Kristalldeformationen erörterte.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß Starks Auffassung der Kohäsion des Steinsalzes auf alle strukturell bekannten Kristallarten erfolgreich ausgedehnt werden kann, soweit man diese als aus Ionen aufgebaut zu betrachten vermag.

Zugleich werden sich hierbei für Translation und elektrolytische Leitung Beziehungen ergeben, die an Starks elektrisch-mechanische „Schubebenen“ der Metalle erinnern.

Spaltung und Struktur.

J. Stark (l. c.) betrachtet die *Na*-Atome und die *Cl*-Atome des Steinsalzes als entgegengesetzt elektrisch geladen und erklärt dessen Spaltbarkeit folgendermaßen. Setzt man auf (001) eine Messerschneide ∥ (010) senkrecht auf und führt einen Schlag gegen den Rücken der Klinge aus, so bewegen sich die unter ihr befindlichen Ionen senkrecht abwärts. Fig. 1 zeigt eine ∥ (100) liegende Ionen-Schicht, deren *Na*-Ionen durch ⊕ und deren *Cl*-Ionen durch ⊖ gekennzeichnet sind, während der Pfeil die Schlagrichtung andeutet. Die unterhalb der Schneide befindlichen Ionen (links vom Pfeil) werden also durch den Schlag nach unten geschleudert; sobald sie hierbei die punktierten Lagen überschreiten, kommt jedes Ion in die Nähe eines gleichartigen, welches in Ruhe geblieben ist (rechts vom Pfeil). Daher werden nunmehr die *Na*-Ionen einander abstoßen und ebenso die *Cl*-Ionen, d. h. es tritt Spaltung ∥ (010) ein.


Fig. 1.

Nach dieser Erklärung darf die Spaltung nicht stattfinden, wenn die Schneide ∥ (010) ⊥ (101) statt ⊥ (001) aufgesetzt wird. Es spielen also bei der Spaltung ähnlich wie bekanntermaßen bei der Translation außer Ebenen auch Richtungen eine Rolle. Als Spaltungsrichtung wollen wir die Richtung jedes geradlinigen parallel einer Spaltungsebene liegenden Weges bezeichnen, auf welchem ein Ion diesseits der Spaltungsebene in die größte Nähe eines gleichen Ions jenseits der Spaltungsebene gelangt. Ist dieser Weg ein Minimum, so heiße seine Richtung Hauptspaltungsrichtung. Beispielsweise liegen im Steinsalz parallel einer Spaltungsebene (010) die Hauptspaltungsrichtungen [001] und [100] sowie die Spaltungsrichtungen [102], $[\bar{1}02]$, [201], $[\bar{2}01]$ u. a., während [101] und $[\bar{1}01]$ keine Spaltungsrichtungen sind.

Nunmehr sei festgestellt, daß Starks Hypothese sich mit allen denjenigen spaltbaren Kristallarten verträgt, die strukturell erforscht sind und ionisiert gedacht werden können. Bleiglanz und Sylvin verhalten sich in bezug auf Spaltbarkeit und Struktur genau wie Steinsalz. In der Zinkblende enthält jede ∥ (100) oder ∥ (111) liegende Ionenschicht ausschließlich gleichartige Ionen und zwar wechselt immer eine Zn-Ebene mit einer S-Ebene; daher kann Zinkblende weder ∥ (100) noch ∥ (111) spalten. Dagegen birgt jede ∥ (110) orientierte Ionenschicht beiderlei Ionen; Spaltung ∥ (110) ist möglich und besitzt die Hauptspaltungsrichtungen [111]. Im Flußspat liegen zwischen je zwei benachbarten nur Ca führenden Ebenen (111) zwei ausschließlich mit F besetzte. Daher muß die Spaltung sich zwischen je zwei benachbarten F-Ebenen vollziehen; die Hauptspaltungsrichtungen innerhalb (111) sind $[11\bar{2}]$; übrigens ist jede F-Ebene (111) von der nächsten F-Ebene doppelt so weit entfernt als von der nächsten Ca-Ebene. Im Rotkupfererz liegen zwischen zwei benachbarten Cu-Ebenen (111), von diesen symmetrisch eingeschlossen, zwei O-Ebenen; zwischen den beiden letzteren erfolgt Spaltung mit den Hauptspaltungsrichtungen $[11\bar{2}]$. Im Kalkspat ist jede Ebene (100), welche Ca-Ionen enthält, mit ebenso vielen CO_3-Ionen besetzt und umgekehrt.

Spaltung vollzieht sich zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ionenschichten (100); Hauptspaltungsrichtungen sind [010] und [001]. Analoges gilt für Natronsalpeter und für Dolomit.

Hiermit ist Starks Auffassung auf alle bis jetzt in Betracht kommenden Fälle erfolgreich übertragen worden. Drei Fragen aber bleiben vorläufig unbeantwortet.

1. Warum erfolgt Spaltung stets nur nach wenigen Flächenarten, obwohl unendlich viele Flächenarten der Starkschen Forderung gehorchen?

2. Warum zeigen Natriumchlorat, Bariumnitrat, die Alaune und andere Kristallarten, die als ionisiert betrachtet werden können, keine deutliche Spaltbarkeit?

3. Wie erklärt sich die Spaltbarkeit gewisser, fraglos nicht elektrolytischer Verbindungen wie Rohrzucker sowie chemischer Elemente wie Diamant und Wismut?

Translation und Struktur.

Translation soll nach J. Stark (l. c.) in elektrolytischen Kristallarten so erfolgen, daß im Gegensatz zur Spaltung keine Annäherung gleichgeladener Ionen eintritt, weil sonst die Translation lange bevor sie merkliche Beträge annimmt, zu Spaltung führen und somit aufhören müßte. J. Stark erläutert das wieder am Steinsalz, dessen Translationsebenen $T = \{110\}$ und Translationsrichtungen $t = [1\bar{1}0]$ sind. Fig. 2 zeigt wie Fig. 1 die *Na*- und *Cl*-Ionen innerhalb einer (100) gelegenen Schicht. Bewirkt man Translation

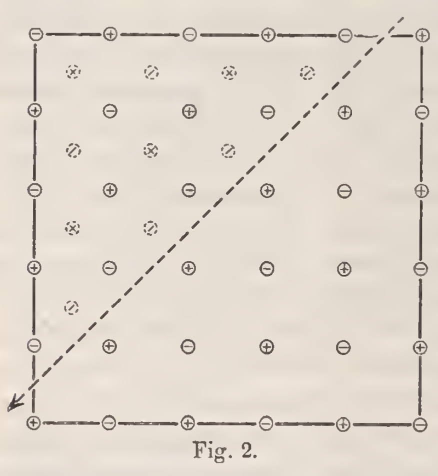


Fig. 2.

längs $T = (011)$ in der Pfeilrichtung $t = [011]$ derart, daß die oberhalb des Pfeiles befindlichen Ionen nach links abwärts

gleiten, so tritt, wie Fig. 2 zeigt, folgendes ein. Die Ionen gelangen durch die punktierten Lagen hindurch an neue Orte, die den ursprünglichen gleichwertig sind, und es findet während dieser Translation keine Annäherung gleichgeladener Ionen und somit auch keine Abstoßung, also keine Spaltung statt.

Diese Vorstellungen sind nun wieder im Einklang mit allen strukturell erforschten Kristallarten, soweit sie ionisiert gedacht werden können. Es sind dies außer Steinsalz noch folgende. Sylvin, $T = (110)$, $t = [110]$; Bleiglanz, $T = (001)$, $t = [110]$; Salmiak, $T = (110)$, $t = [001]$; Flußspat,[1] $T = (001)$, $t = [110]$; Zinkblende,[1] $T = (111)$, $t = [112]$; Magnesit, $T = (111)$, $t = [110]$; Dolomit, $T = (111)$, $t = [110]$; Korund,[1] (?) $T = (111)$, $t = [121]$; hierbei ist für Korund Dissoziation in Al_2 und O_3 angenommen worden.

Starks Translationshypothese läßt folgende Fragen vorläufig unbeantwortet.

1. Warum vollzieht sich Translation stets nur parallel wenigen Flächenarten, obwohl doch unendlich viele verschiedene Stellungen Starks Forderung befriedigen?

2. Warum herrschen im Bleiglanz andere Translationsebenen als in dem strukturell völlig analogen Steinsalz?

Liegen Spaltungsebenen und Translationsebenen einander parallel wie im Gips, wo $T = (010)$, so müssen entweder innerhalb T die Spaltungsrichtungen von den Translationsrichtungen abweichen oder aber es müssen sich Spaltung und Gleitung in verschiedenen Nivos vollziehen.

Leitvermögen und Struktur.

Da die Translationsrichtungen t offenbar diejenigen Richtungen darstellen, in denen sich die hypothetischen Ionen am leichtesten verschieben lassen, so werden sie mit den Richtungen des größten Leitvermögens identisch sein. Tatsächlich herrscht in den zwei bisher untersuchten Fällen das größte Leitvermögen

[1]) Die Translationen von Flußspat, Zinkblende und (?) Korund hat Herr stud. Kurt Veit im hiesigen Mineralog. Institut bewirkt und festgestellt, jedoch infolge des Krieges noch nicht zu veröffentlichen vermocht.

parallel den Translationsebenen T. So liegen Maxima nach H. Bäckström[1]) im Eisenglanz und nach J. Curie[2]) im Kalkspat ⊥ (111); da nun (111) im (?) Korund sowie im Magnesit als Translationsebene nachgewiesen ist, so darf auch für den isomorphen Eisenglanz bzw. Kalkspat T = (111) angenommen werden. Überdies hat das Leitvermögen von Eisenglanz[1]) und von Kalkspat[3]) elektrolytischen Charakter.

Liegen in den Translationsrichtungen t, wie bereits wahrscheinlich gemacht, Maxima des elektrolytischen Leitvermögens, so werden Anionen und Kationen beim Stromdurchgang ∥ t nicht aufeinander treffen dürfen, weil hierdurch die Leitung gestört würde. Diese Forderung bedeutet aber, daß in der Struktur längs t nicht entgegengesetzt geladene Ionen aufeinanderfolgen dürfen. Diese Bedingung wird nun tatsächlich von allen in Betracht kommenden Kristallarten erfüllt, die bisher geprüft werden konnten; es sind dies Steinsalz, Sylvin, Bleiglanz, Salmiak, Flußspat, Zinkblende, Magnesit, Dolomit und (?) Korund. Bei der Translation dieser Kristallarten passiert also kein Ion einen Ort, an welchem sich zuvor ein entgegengesetzt geladenes Ion befand. Für Atome dagegen würde dieser Satz nicht durchweg gelten, da im Magnesit und im Dolomit die O-Atome Orte passieren, an denen sich vorher C-Atome befanden und umgekehrt.

Diese Beziehungen zwischen Translation und Leitvermögen kristallisierter Elektrolyte erinnern an Starks[4]) „Schubebenen" der Metalle. Hierunter versteht Stark rationale Ebenen (hkl) eines Metallkristalles, in denen Valenzelektronen netzartig angeordnet, aber keine Metallionen enthalten sind. Solche Elektronen-Netze sollen unter dem Einfluß einer beliebig kleinen

---

[1]) H. Bäckström, Oefvers. Kongl. Vet. Förh. **45**, 533. Stockholm 1888.

[2]) J. Curie, Ann. chim. et phys. (6) **17**, 385, 1889 und **18**, 203, 1889.

[3]) E. Warburg und F. Tegetmeier, Wiedem. Ann. **32**, 442, 1887 und **35**, 462, 1888; J. Curie, l. c.; A. Joffe, Dissert., München 1905; W. C. Röntgen, Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss. **1**, 113, 1907; K. Szlenker, Dissert., München 1913.

[4]) J. Stark, Physikal. Zeitschr. **13**, 585, 1912.

elektrischen Kraft längs den ihnen parallelen Metallionen-Netzen hingleiten und so die elektrische Strömung metallischer Leiter bilden; andrerseits sollen unter dem Einfluß einer beliebig kleinen mechanischen Kraft die Metallionen-Netze sich entlang den Elektronen-Netzen bewegen. Hiernach sind in Metallen mechanische Schubebenen oder Translationsebenen T einerseits und elektrische Schubebenen andrerseits einander parallel, so daß auch in Metallkristallen — wie in kristallisierten Elektrolyten — Maxima des Leitvermögens ∥ T liegen müssen.

Schlussfolgerungen.

Da Starks Vorstellungen von Spaltung und Translation kristallisierter Salze alle obigen Prüfungen bestanden haben, so dürfte die zugrunde liegende Annahme von Kristallionen berechtigt sein. Die Existenz der letzteren ist überdies bereits durch eine ziemlich große Anzahl verschiedenartiger Erfahrungen wahrscheinlich geworden.[1]) Viele Kristallarten, deren wässrige Lösungen elektrolytisch leiten, werden aus Ionen aufgebaut sein, die sich als solche aus der Mutterlauge an die wachsenden Kristalle anlagern. Von vornherein schon ist der Austritt von Ionen aus Flüssigkeiten, welche Molekeln und Ionen der kristallisierenden Verbindung nebeneinander enthalten, mindestens ebenso wahrscheinlich wie der Austritt von Molekeln. Im Einklang mit dieser Auffassung nimmt G. Tammanns[2]) Theorie des Polymorphismus an, daß aus assoziierten Flüssigkeiten je nach den Bedingungen die eine oder die andere der Molekelarten kristallbildend sich ausscheidet. Unsere Annahme, daß mehratomige Ionen wie etwa $\overline{CO}_3$ ihr Atomgefüge bei der Kristallisation annähernd bewahren, steht in Übereinstimmung mit P. Groths[3]) Ergebnis, daß die Ringe mancher aromatischen und auch gewisser alifatischen Verbindungen bei der Kristallbildung sich wahrscheinlich erhalten.

---

[1]) Vgl. den Bericht im Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 14, 52, 1917.

[2]) G. Tammann, Physikal. Zeitschr. 14, 1087, 1913.

[3]) P. Groth, Ber. d. Chem. Ges. 47, 2063, 1914.

Die Richtigkeit der oben geprüften Vorstellungen über eine Beziehung zwischen Translation und Leitvermögen salzartiger sowie metallischer Kristalle würde eine Änderung derjenigen Theorie erfordern, die hinsichtlich der Elektrizitätsleitung von Kristallen bisher in Geltung war und übrigens nur die Leiter erster Klasse berücksichtigte. Nicht nur die Ionenbewegung elektrolytischer Kristalle, sondern auch der Elektronentransport längs den Schubebenen der kristallisierten Metalle müßte Vektoren des Leitvermögens ergeben, die nicht wie bisher als Radienvektoren von Ellipsoiden betrachtet werden könnten. Eine mit Elektronenströmung operierende Theorie metallischer Leiter ist bis heute lediglich in Bezug auf isotrope Körper von P. Drude, E. Riecke und A. H. Lorentz in Angriff genommen worden;[1]) hinsichtlich elektrolytischer Kristalle fehlt vorläufig jegliche Theorie.

Zusammenfassung.

Die Vorstellungen von J. Stark über die Spaltbarkeit des Steinsalzes konnten auf Sylvin, Bleiglanz, Flußspat, Zinkblende, Rotkupfererz, Kalkspat, Natronsalpeter und Dolomit übertragen werden. Hierbei ergaben sich bestimmte Spaltungsnivos und bestimmte Spaltungsrichtungen.

Starks Auffassung von der Translationsfähigkeit des Steinsalzes wurde auf Sylvin, Bleiglanz, Salmiak, Flußspat, Zinkblende, Magnesit, Dolomit und (?) Korund ausgedehnt. Die Translationsrichtungen t dieser Kristallarten zeigten eine gemeinsame Struktureigentümlichkeit derart, daß $\parallel t$ Maxima eines elektrolytischen Leitvermögens zu erwarten sind; solche Maxima liegen im (?) Eisenglanz und im Kalkspat tatsächlich parallel den Translationsebenen.

[1]) Vgl. W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik 340. Leipzig und Berlin 1910.

Zur Quantentheorie der Spektrallinien. Intensitätsfragen.

Von A. Sommerfeld.

Vorgelegt in der Sitzung am 3. März 1917.

Die moderne, von Bohr begründete Theorie der Spektrallinien zielt in ihrer gegenwärtigen Ausbildung lediglich auf die Erforschung der Schwingungszahlen[1]) und verzichtet dabei fast vollständig auf das Verständnis der Schwingungsformen[1]) (Polarisation, Interferenzfähigkeit, Dämpfung); ja, sie ist einstweilen nicht einmal im Stande, die hierüber von der klassischen Optik gelieferten wertvollen, älteren Aufschlüsse in ihren Rahmen aufzunehmen. Es ist dieses ein unerfreulicher Zustand, aber offenbar nur ein Übergangszustand. Die Erfolge der klassischen Schwingungsoptik sind zu handgreiflich, als daß sie auf die Dauer über Bord geworfen werden könnten. „An diesen Dingen ist ein Zweifel nicht mehr möglich, eine Widerlegung dieser Anschauungen ist für den Physiker undenkbar. Die Wellentheorie des Lichtes ist, menschlich gesprochen, Gewißheit; was aus derselben mit Notwendigkeit folgt, ist ebenfalls Gewißheit."[2]) Die erste Andeutung dafür, daß es gelingen muß, die Brücke zu schlagen von der älteren Theorie der Schwingungsformen zu der Quantentheorie der Schwingungszahlen, liefert die allerdings recht bizarre Polarisationsregel, die Epstein[3]) aus den Tatsachen des Stark-

[1]) Diese treffende Gegenüberstellung entnehme ich einem Briefe von Herrn W. Voigt.

[2]) H. Hertz in seinem Heidelberger Vortrag „Licht und Elektrizität".

[3]) P. Epstein, Ann. d. Phys. 50, p. 514, 1916.

Effektes entwickelt hat und die sich auch beim Zeeman-Effekt[1]) bewährt hat: Schwingungsrichtung parallel zum Felde, wenn die azimutale Quantenzahl beim Übergang aus der Anfangs- in die Endbahn um eine gerade, Schwingungsrichtung senkrecht zum Felde, wenn sie um eine ungerade Zahl springt.

Wie steht es andererseits mit der Frage der Intensitäten? Insofern jedenfalls ungünstiger, als hier schon die empirischen Tatsachen viel lückenhafter und unsicherer sind, als im Gebiete der Schwingungsformen oder dem der Schwingungszahlen. Wir kennen nur wenige zuverlässige Ergebnisse, z. B. das Intensitätsverhältnis im D-Liniendublett 2:1 und seine Aufteilung im Magnetfelde auf die verschiedenen Zeeman-Komponenten, ferner die von Füchtbauer[2]) aufgestellte Regel, daß in den höheren Gliedern der Hauptserie der Alkalien dieses Verhältnis gleich 3:1, 4:1 etc. wird. Im allgemeinen aber können die Angaben über die Intensitäten von Spektrallinien nur als grobe und qualitative Schätzungen gelten; und auch die Erklärung, welche die Schwingungstheorie z. B. von dem Intensitätsverhältnis 2:1 der D-Linien gibt, indem sie der einen Linie zwei, der anderen ein schwingungsfähiges Elektron zuordnet, ist mehr eine Umschreibung als eine Begründung der beobachteten Tatsachen.

Unter diesen Umständen gewinnen die Beobachtungen von Paschen[2]) über die Intensität der Feinstruktur von wasserstoff-ähnlichen Spektrallinien und ihre mögliche Erklärung durch die Quantentheorie ein erhöhtes Interesse. Die Paschenschen Messungen fordern eine theoretische Diskussion heraus, einmal, weil bei den wasserstoff-ähnlichen Linien die Verhältnisse bei weitem am einfachsten liegen, sodann aber deshalb, weil es Paschen gelungen ist, durch äußere Umstände (Übergang von der Gleichstrom- zur Funkenanregung, Veränderung des Druckes in der Röhre) die Intensitätsverteilung auf die einzelnen Linien der Feinstruktur zu variieren und zu kontrol-

[1]) A. Sommerfeld, Physikal. Zeitschr. 17, 1916.

[2]) F. Paschen, Bohrs Heliumlinien, Ann. d. Phys. 50, p. 901, 1916.

lieren. Es ist klar, daß diese Beobachtungen und die näheren Umstände ihrer Realisierung der Theorie wertvolle Anhaltspunkte für die Beurteilung der Intensitätsfrage an die Hand geben können.

In den Bohrschen Arbeiten ist, soviel ich sehe, das Intensitätsproblem nirgends in Angriff genommen. Ich selbst äußerte, „mehr um eine bestimmte Regel für die späteren Zeichnungen zu haben, als um damit quantitative physikalische Behauptungen aufzustellen", eine Vermutung über die relative Intensität der Komponenten einer wasserstoff-ähnlichen Feinstruktur. Das betreffende Liniengebilde sei gegeben durch die erweiterte Balmersche Formel

$$(1) \qquad \nu = N Z^2 \left(\frac{1}{(n+n')^2} - \frac{1}{(m+m')^2} \right),$$

N = Rydbergsche Zahl, Ze = Kernladung, n, n' azimutale und radiale Quantenzahl für die Endbahn, m, m' die entsprechenden Zahlen für die Anfangsbahn. Dann lautet meine Intensitätsregel für die durch die Zahlen n, n', m, m' gegebene Komponente der Feinstruktur[1])

$$(2) \qquad J = \frac{n}{n+n'} \cdot \frac{m}{m+m'}.$$

Zur Begründung derselben bemerkte ich folgendes: „Die in eine Gerade ausgeartete Ellipse ($n = 0$ resp. $m = 0$) haben wir für unmöglich erklärt; wir legen ihr das Häufigkeitsmaß Null bei. Den Kreis ($n' = 0$ resp. $m' = 0$) werden wir für die wahrscheinlichste Bahn halten; wir geben ihm z. B. das Häufigkeitsmaß 1. Dann liegt es nahe, die Ellipsenbahnen zwischen Kreis und ausgearteter Ellipse allgemein mit einem Häufigkeitsmaß proportional n resp. m zu bewerten." Dies führt zu der bereits mitgeteilten Intensitätsformel, „vorausgesetzt, daß der Übergang aus der Anfangs- in die Endbahn nicht durch Quantenungleichungen behindert ist." Im letzteren Falle sollte die Intensität einzelner Komponenten verkleinert werden oder ganz verschwinden.

1) Ann. d. Phys. 51, p. 27, 1916.

Inzwischen habe ich mich im Anschluß an eine Arbeit von K. Herzfeld (s. u.) überzeugt, daß meine frühere Intensitätsregel mehr sein dürfte als eine willkürliche Vermutung, daß sie nämlich einer quantentheoretischen Begründung fähig ist. Diese Begründung liefert zugleich Anhaltspunkte für die Gültigkeitsgrenzen jener Intensitätsregel und für ihre Einschränkung durch etwaige Quantenungleichungen. Da das von Paschen bisher mitgeteilte Beobachtungsmaterial nur spärlich ist, werden manche Fragen, vor die uns die theoretische Diskussion stellt, zunächst unentschieden bleiben müssen. Wie ich höre, soll jenes Beobachtungsmaterial demnächst ergänzt und photometrisch präzisiert werden. Unsere Erörterungen beabsichtigen daher nicht nur, die vorhandenen Messungen, soweit es zur Zeit möglich ist, zu verstehen, sondern auch Gesichtspunkte aufzustellen, nach denen sich die weitere Intensitätsforschung orientieren kann. In dieser Absicht mögen die folgenden grundsätzlichen Fragen aufgeworfen werden:

I. Gibt es eine typische, durch einfachste Umstände zu verwirklichende Verteilung der Intensität auf die Komponenten einer Feinstruktur?

II. Läßt sich die typische Intensitätsverteilung, wie es unsere Formel (2) vorsieht, durch das Produkt zweier Faktoren darstellen, deren einer sich auf den ersten Term der Spektralformel (Endbahn), deren anderer auf den zweiten Term (Anfangsbahn) bezieht?

III. Wird die Intensitätsverteilung auf die verschiedenen Linien ein und desselben Termes, der z. B. durch die Quantensumme $s = n + n'$ charakterisiert sei, gemäß unserer Formel (2) genau oder angenähert durch die Verhältniszahlen $s : s - 1 : \cdots 3 : 2 : 1$ wiedergegeben?

IV. Welche Umstände schränken die Gültigkeit der typischen Insitätsverteilung ein? Lassen sich diese Umstände als Hindernisse in der freien Ausbildung der Elektronenbahnen auffassen?

V. Läßt sich in diesem Falle die tatsächliche Intensitätsverteilung noch durch das Produkt zweier

Faktoren darstellen, entsprechend der Kombination der Schwingungszahl aus zwei Termen? Oder aber

VI. Hängt das Ausfallen gewisser Linien und die Schwächung der Intensität gegenüber dem typischen Falle in gewissen anderen Linien von der gleichzeitigen Größe der Quantenzahlen in beiden Termen ab, wie es unsere Quantenungleichungen behaupteten, also von einer Wechselbeziehung zwischen Anfangs- und Endbahn?

Die prinzipielle Wichtigkeit insbesondere der Fragestellungen II und V liegt auf der Hand. Nur wenn II bejaht werden kann, ist die typische Intensitätsverteilung ein statistisches Problem und erweisen sich die Wahrscheinlichkeiten der Anfangs- und Endbahn als unabhängige Wahrscheinlichkeiten. Wenn V verneint und VI bejaht werden muß, so zeigt sich, daß im allgemeinen die Intensitätsfrage nicht statistisch, sondern dynamisch behandelt werden muß, durch Betrachtung des Übergangs aus der Anfangs- in die Endbahn. Insofern weist die Intensitätsfrage über den Standpunkt der Schwingungszahlen hinaus und leitet zu der Untersuchung der Schwingungsformen über. Auch für die Frage, ob der Phasenraum als Kontinuum oder als Netzwerk aufzufassen ist, kann eine sorgsame theoretische und experimentelle Prüfung des Intensitätsproblems lehrreich werden.

Die Anregung zu den nachfolgenden Erörterungen erhielt ich, wie gesagt, durch eine interessante Arbeit von Herrn K. Herzfeld[1]), in welcher anhangweise darauf hingewiesen wird, daß meine Intensitätsregel (2) sich statistisch begründen läßt. Der Standpunkt der Herzfeldschen Arbeit weicht von dem unserigen ab und betrifft nicht die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Linienkomponente, sondern diejenige der Gesamtenergie für einen der von Bohr aufgewiesenen, quantenmäßig ausgezeichneten Energiewerte. In § 4 werde ich zeigen, daß die Herzfeldschen Resultate direkter und fast ohne Rechnung auf unserem Wege sich ergeben.

---

[1]) K. Herzfeld, Zur Statistik des Bohrschen Wasserstoffmodells. Ann. d. Phys. 51, p. 261, 1916.

§ 1. Abzählung diskreter Quantenzustände. Typische Intensitätsverteilung.

Indem wir alle Quantenzustände der gleichen Energie mit der gleichen Wahrscheinlichkeit bewerten und das Boltzmannsche Prinzip benutzen, setzen wir an

$$W = A e^{-\frac{E}{kT}}. \tag{3}$$

E bedeutet die Energie des betreffenden Zustandes, A die Anzahl seiner verschiedenen Herstellungsarten. Für die Bahnen, die zu demselben Term einer Feinstruktur gehören, ist die Energie die gleiche (bis auf relativistische Korrektionsglieder, die für die Intensitätsmessung nicht in Betracht kommen). Der Exponentialterm fällt daher für die Frage der relativen Intensitäten fort. Ist die betreffende Bahn durch die Quantenzahlen n und n' (n azimutales, n' radiales Quantum) gegeben, so können wir also statt (3) schreiben:

$$W_{n,n'} = A. \tag{4}$$

Nun entsteht das azimutale Quantum n aus der Summe zweier Quantenzahlen n_1 und n_2, $n = n_1 + n_2$, welche z. B. zu der geographischen Länge und Breite eines räumlichen Polarkoordinatensystems gehören. In der Tat ist die Bewegung des Elektrons im Raume ein Problem von drei Freiheitsgraden; zu seiner vollständigen Behandlung braucht man also drei Koordinaten und drei Quantenzahlen. Die Zahlen n und n' sind von der Orientierung des räumlichen Koordinatensystems unabhängig, die Zahlen n_1 und n_2 dagegen hängen davon ab. In Wirklichkeit wird die räumliche Orientierung des Koordinatensystems stets durch gewisse physikalische Merkmale (kleine äußere Kraftfelder oder andere Nebenumstände) bestimmt sein; für die theoretische Betrachtung der reinen und abstrakten Keplerbewegung kann sie jedoch willkürlich (aber fest) gewählt werden.

Der Quantenzustand (n, n') ist hiernach bezüglich der Zahl n' nur auf eine Art, bezüglich der Zahl n aber auf $n + 1$ Arten herstellbar, gemäß dem Schema

$n = n + 0, (n-1) + 1, (n-2) + 2 \ldots 1 + (n-1), 0 + n.$

Infolgedessen wird die Anzahl A gleich $(n+1) \cdot 1$ und (4) geht über in

$$W_{n,n'} = n + 1. \tag{4a}$$

Für die relativen Intensitäten der verschiedenen Komponenten eines durch die Quantensumme $s = n + n'$ gegebenen Terms erhalten wir daher nach (4a) die Proportion

$$s+1 : s : s-1 : \cdots 3 : 2 : 1. \tag{5}$$

Hier entspricht das erste Glied der Kreisbahn ($n = s$, $n' = 0$), das letzte Glied der ausgearteten Ellipse ($n' = s$, $n = 0$), welche durch den Kern hindurch führt und von Epstein als Pendelbahn bezeichnet wird. Indem wir diese aus dynamischen Gründen für unmöglich erklären, befinden wir uns in Übereinstimmung mit der Erfahrung bei feldfreier Beobachtung — bei Anlegung eines elektrischen Feldes dagegen scheinen Pendelbahnen mit schwacher Intensität auftreten zu können —. Mit Hinzuziehung dieses dynamischen Gesichtspunktes reduziert sich die zu einem Term s gehörige Komponentenzahl von $s+1$ auf s und die relativen Intensitäten derselben werden statt durch (5) dargestellt durch

$$s+1 : s : s-1 : \cdots 3 : 2. \tag{5a}$$

Von dem einzelnen Term zur Spektrallinie übergehend übertragen wir unsere Regel (5) resp. (5a) auf den anderen Term (m, m' mit der Quantensumme $r = m + m'$) und sehen Anfangs- und Endbahn als unabhängige Ereignisse an. Die einzelne Linie der Feinstruktur erhält dann die relative Intensität

$$W_{n,n'} \cdot W_{m,m'}.$$

Wählen wir die Einheit so, daß die Kreisbahn in jedem Term die Intensität 1 erhält

$$W_{s,0} = W_{r,0} = 1,$$

so ergibt sich allgemein

$$J = W_{n,n'} \cdot W_{m,m'} = \frac{n+1}{n+n'+1} \cdot \frac{m+1}{m+m'+1}. \tag{6}$$

Wir haben hiermit bereits zu den in der Einleitung aufgeworfenen Fragen Stellung genommen. Wir haben I. vorausgesetzt, daß es für beide Terme je eine typische, lediglich statistisch bestimmte Intensitätsverteilung gebe und daß diese Verteilungen sich II. nach dem Gesetz der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten kombinieren. Dabei zeigte sich, daß die erwartete Proportion III. für die Intensität innerhalb eines Termes zwar nicht genau, aber in Gestalt von (5) oder (5a) angenähert gelten würde und dementsprechend die Intensitätsregel (2) für die Linien einer Feinstruktur in (6) abzuändern wäre.

Auf den ersten Blick erscheint der Ansatz III. einleuchtender als die Ergebnisse (5) oder (5a), da er zwanglos die Tatsache der verschwindenden Intensität bei den Pendelbahnen in sich aufnimmt. Allerdings ist diese Tatsache nicht statistischen, sondern, wie hervorgehoben, dynamischen Ursprungs; es ist daher nicht zu verwundern, daß sie in (5) nicht und in (5a) nur gezwungen zum Ausdruck kommt. Immerhin kann man prüfen, ob sich bei abgeänderter Abzählung der Quantenzustände das Resultat dem vermuteten und scheinbar befriedigenderen Ansatz III. anpassen läßt.

Man erreicht dieses Ziel, wenn man festsetzt: Ein Quantenzustand, für den eine Quantenzahl 0 ist, möge nur mit halbem Gewicht bewertet werden. Von den $n+1$ Zerlegungen der Zahl $n = n_1 + n_2$ sind alsdann $n-1$ voll, dagegen 2 nur halb zu rechnen. Die Summe der Gewichte dieser $n+1$ Zerlegungen ist daher gleich n, und es ergibt sich:

$$W_{n,n'} = n \cdot 1 \quad \text{für } n' > 0$$

dagegen

$$W_{n,n'} = n \cdot \tfrac{1}{2} \quad \text{für } n' = 0.$$

Für die Pendelbahn, wo $n_1 = n_2 = 0$, aber $n' > 0$ ist, würde sich als Gewicht nur $\frac{1}{4}$ ergeben, also

$$W_{n,n'} = \tfrac{1}{4} \cdot 1 \quad \text{für } n = 0.$$

Statt der Proportionen (5) und (5a) erhalten wir daher jetzt

$$\frac{s}{2} : s-1 : \cdots 2 : 1 : \tfrac{1}{4} \text{ resp.} \tag{7}$$

$$\text{(7a)} \qquad \frac{s}{2} : s - 1 : \cdots 2 : 1$$

und statt der Intensitätsregel (6)

$$\text{(8)} \qquad J = \frac{n}{n + n'} \cdot \frac{m}{m + m'} \text{ für } n',\ m' \neq 0;$$

dagegen würde für $n' = 0$ oder $m' = 0$ je ein Faktor $\frac{1}{2}$ hinzuzufügen sein.

Durch Abänderung unserer Abzählung haben wir uns also den ursprünglich vermuteten Gesetzen III. und (2) genähert, haben aber gerade bei den Kreisbahnen, die wir ursprünglich mit der größten Intensität bewerteten, eine Reduktion auf die Hälfte in Kauf nehmen müssen. Obwohl unsere abgeänderte Abzählung und diese Reduktion künstlich scheint, läßt sich anführen, daß die Beobachtungen bei Gleichstrom (vgl. § 5) auf eine solche Reduktion scheinbar hinweisen; auch vom Standpunkte des nächsten Paragraphen läßt sie sich in gewissem Sinne rechtfertigen und erscheint dann weniger gezwungen.

§ 2. Abzählung im kontinuierlichen Phasenraum. Andere Ansätze für die Intensitätsverteilung.

Wenn auch die Vorstellung des kontinuierlichen Phasenraumes für die klassische Statistik ausgebildet ist und dem diskreten Quantenstandpunkt wenig entspricht, wollen wir doch die Folgerungen einer mehr kontinuierlichen Betrachtungsweise entwickeln, teils um den Anschluß an Herzfeld zu gewinnen, teils um bei der noch recht dunkeln Natur unseres Problems keine für die Deutung späterer Beobachtungen vielleicht nützliche Möglichkeit zu übersehen.

Wir setzen also für eine unendlich wenig ausgedehnte Phase, indem wir den Energiefaktor in (3) als für alle Phasen einer Feinstruktur merklich identisch sogleich unterdrücken, die Wahrscheinlichkeit dW gleich der Phasenausdehnung dA

$$dW = dA = dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z.$$

Die Phasenausdehnung ist hier gemessen in rechtwinkligen Koordinaten xyz und den zugehörigen Impulskoordinaten p_x, p_y, p_z. Statt dessen ist es für das Folgende bequemer, räumliche Polarkoordinaten r, ϑ, ψ mit den zugehörigen Impulsen p_r, p_ϑ, p_ψ zu benutzen, also zu schreiben

$$dW = dr\, d\vartheta\, d\psi\, dp_r\, dp_\vartheta\, dp_\psi. \tag{9}$$

In diesen Koordinaten sind nämlich die ausgezeichneten Quantenbahnen gegeben durch die Phasenintegrale

$$\int dr\, dp_r = n'h, \quad \int d\vartheta\, dp_\vartheta = n_1 h, \quad \int d\psi\, dp_\psi = n_2 h.$$

Ich erinnere z. B. an eine Figur[1]) in der Phasenebene (r, p_r), in der die Bilder der aufeinander folgenden Quantenzustände geschlossene und mit wachsendem n' einander einschließende Kurven um den Nullpunkt sind, welcher seinerseits dem Zustande $n' = 0$ entspricht. Wir betrachten den unendlich schmalen Streifen, der von zwei Nachbarkurven der Schar begrenzt wird, also zu zwei (im allgemeinen nicht gequantelten) Zuständen n' und $n' + dn'$ gehört. Die Phasenausdehnung dieses Streifens ist $dn'h$. Ebenso betrachten wir einen Streifen in der (ϑ, p_ϑ)- und der (ψ, p_ψ)-Ebene, deren Inhalt $dn_1 h$ und $dn_2 h$ ist. Indem wir (9) über diese drei Streifen integrieren, erhalten wir

$$W_{dn', dn_1, dn_2} = \int dr\, dp_r \int d\vartheta\, dp_\vartheta \int d\psi\, dp_\psi$$
$$= dn'\, dn_1\, dn_2\, h^3.$$

Da uns die Quantenzahlen n_1, n_2 einzeln nicht interessieren und es in den Beobachtungen nur auf deren Summe $n = n_1 + n_2$ ankommt, gehen wir durch abermalige Integration über zu derjenigen Phasenausdehnung (Wahrscheinlichkeit), die wir nennen

$$W_{dn', dn} = dn' \int dn_1\, dn_2\, h^3.$$

Wir haben also alle diejenigen $n_1 n_2$ zusammen zu fassen, die zu dem gleichen n mit Spielraum dn gehören. Dies geschieht nach Fig. 1. Der Ort $n_1 + n_2 = n =$ konst. ist in der

1) Ann. d. Phys., l. c., Bd. 51, p. 18.

(n_1, n_2)-Ebene eine Strecke von der Länge $n\sqrt{2}$, die auf beiden Achsen die Stücke $n_1 = n$ resp. $n_2 = n$ abschneidet. Der Abstand der beiden Örter $n =$ konst. und $n + dn =$ konst. ist $dn/\sqrt{2}$, da die zwischen beiden Örtern enthaltenen Achsenabschnitte gleich dn sind. Der Inhalt des Streifens zwischen beiden Örtern wird also $n\,dn$ und unsere Phasenausdehnung

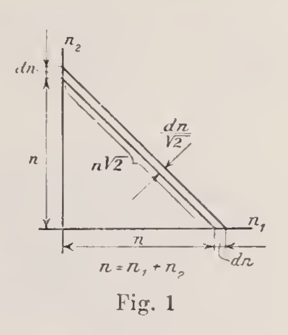


Fig. 1

$$W_{dn', dn} = dn'\, n\, dn\, h^3. \tag{10}$$

Von hier aus kommt man nun sofort zu der Wahrscheinlichkeit der eigentlichen Quantenzustände von ganzzahligem n', n, die unser Ziel ist:

$$W_{n', n} = \int dn' \int n\, dn\, h^3.$$

Bezüglich der Wahl der Integrationsgrenzen hat man drei Möglichkeiten:

A) Man integriert über ein Gebiet, dessen Mitte von der Bildkurve des betrachteten Quantenzustandes durchzogen wird. Dabei ist die untere Grenze, wo sie negativ ausfällt, selbstverständlich durch 0 zu ersetzen. Also

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{n'-1/2}^{n'+1/2} dn' = \begin{cases} 1 \cdots n' > 0, \\ \frac{1}{2} \cdots n' = 0, \end{cases} \quad \int_{n-1/2}^{n+1/2} n\, dn = \begin{cases} n \cdots n > 0, \\ \frac{1}{8} \cdots n = 0, \end{cases} \\ \qquad W_{n, n'} = n, \quad W_{n, 0} = \frac{1}{2}, \quad W_{0, n'} = \frac{1}{8}. \end{array} \right.$$

Dieses Verfahren führt also, abgesehen von der etwas anderen Bewertung der Pendelbahn, welche ohne praktisches Interesse ist, zu der abgeänderten Abzählung vom Schlusse des vorigen Paragraphen, insbesondere zu der Intensitätsreduktion um die Hälfte für die Kreisbahnen.

B) Man integriert in beiden Quantenzahlen n' und n über ein Gebiet, dessen untere Grenze dem Quantenzustande n, n' entspricht. Dann gilt für alle Zahlen einschließlich $n' = 0$ und $n = 0$:

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int\limits_{n'}^{n'+1} dn' = 1, \quad \int\limits_{n}^{n+1} n\,dn = n + \tfrac{1}{2}. \\ &W_{n,n'} = n + \tfrac{1}{2}. \end{aligned} \right.$$

Dieses Verfahren führt also zu einem Ergebnis, welches in der Mitte steht zwischen der typischen Intensitätsverteilung, die wir im vorigen Paragraphen ableiteten, und derjenigen, die wir in der Einleitung vermuteten. In der Tat gilt jetzt an Stelle von (5) und III für die verhältnismäßige Intensität innerhalb des Termes $n + n' = s$

$$(13) \qquad s + \tfrac{1}{2} : s - \tfrac{1}{2} : s - \tfrac{3}{2} : \cdots : \tfrac{5}{2} : \tfrac{3}{2} : \tfrac{1}{2},$$

wobei das letzte Glied der Proportion der Pendelbahn entspricht und aus dynamischen Gründen durch 0 ersetzt werden kann.

C) Man integriert über ein Gebiet, dessen obere Grenze zu den ganzen Quantenzahlen n, n' gehört. Dies liefert

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int\limits_{n'-1}^{n'} dn' = \begin{cases} 1 \ldots n' > 0 \\ 0 \ldots n' = 0 \end{cases}, \quad \int\limits_{n-1}^{n} n\,dn = \begin{cases} n - \tfrac{1}{2} \ldots n > 0 \\ 0 \quad \ldots n = 0 \end{cases}, \\ &W_{n,n'} = \begin{cases} n - \tfrac{1}{2} \ldots n \text{ und } n' > 0 \\ 0 \quad \ldots n \text{ oder } n' = 0. \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Dieses Verfahren belegt also nicht nur jede Pendelbahn, sondern auch jede Kreisbahn statistisch mit der Intensität 0 und wird daher von der Erfahrung widerlegt.

Wir können die bisherigen Ergebnisse in zwei Gruppen teilen. Die erste nennen wir die typische; zu ihr rechnen wir diejenigen Insitätsverteilungen, welche ähnlich sind der ursprünglich vermuteten Verteilung III. Es sind dieses (5) und (13). Die zweite Gruppe möge als abgeänderter Typus gelten; zu ihr gehören die fast identischen Verteilungen (7) und (11), sowie (14). Die Abänderung betrifft dabei gegenüber dem ersten Typus wesentlich das Verhalten der Kreisbahn, deren Wahrscheinlichkeit hier auf die Hälfte herabgesetzt wird. Als Beispiele führen wir die relativen Intensitäten im Dublett, Triplett und Quartett nach unseren ver-

schiedenen Verteilungsgesetzen an (die Bezeichnung Dublett etc. ist so gewählt, daß die Pendelbahn nicht mitgezählt wird; die auf sie statistisch entfallende Intensität ist in die folgende Tabelle nicht aufgenommen):

Erste Gruppe, typische Verteilung.

	(III)	(5)	(13)
Dubl.	2 : 1	3 : 2	2,5 : 1,5,
Tripl.	3 : 2 : 1	4 : 3 : 2	3,5 : 2,5 : 1,5,
Quart.	4 : 3 : 2 : 1	5 : 4 : 3 : 2	4,5 : 3,5 : 2,5 : 1,5.

Zweite Gruppe, abgeänderter Typus.

	(7) oder (11)	(14)
Dubl.	1 : 1	0 : 0,5,
Tripl.	1,5 : 2 : 1	0 : 1,5 : 0,5,
Quart.	2 : 3 : 2 : 1	0 : 2,5 : 1,5 : 0,5.

§ 3. Gültigkeitsgrenzen der typischen Intensitätsverteilung.

Unsere statistischen Betrachtungen setzen voraus, daß die abzuzählenden Bahnen dynamisch möglich sind. Weil wir die Pendelbahn im allgemeinen für dynamisch unmöglich erklärten, ließen wir sie in der letzten Abzählung bereits fort. In ähnlicher Weise hat Bohr das Nichtauftreten der höheren Glieder der Balmer-Serie in der Geisler-Röhre und ihr Auftreten (bis $m = 32$) in den Spektren der Nebelflecke sehr befriedigend begründet. Der Bohrsche Gedanke, den auch Herzfeld l. c. übernimmt, ist der, daß sich die Kreisbahnen von großem Radius nur bei großer Verdünnung des Gases ausbilden können, sonst aber durch die Größe der freien Weglänge behindert werden.

Auf unsere Feinstruktur von gegebener Quantensumme $s = n + n'$ überträgt sich dieser Gedanke folgendermaßen: Wir beschreiben um den Kern als Zentrum eine Kugel vom Radius R, welcher der mittleren freien Weglänge entsprechen möge. Diese Kugel kann gegenüber dem Bahnsystem unserer Feinstruktur dreierlei verschiedene Lagen einnehmen (vgl. Fig. 2):

a) Sie kann die am weitesten ausgreifende Bahn vollständig umschließen. Dann behindert sie keine Bahn unseres Systems.

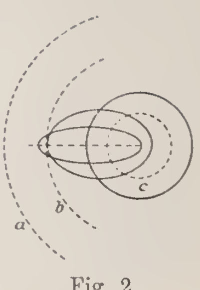
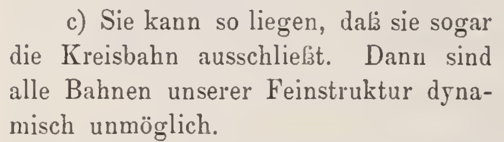


Fig. 2

b) Sie kann einige dieser Bahnen schneiden und daher dynamisch unmöglich machen. Die übrigen Bahnen sind dann nicht behindert.



c) Sie kann so liegen, daß sie sogar die Kreisbahn ausschließt. Dann sind alle Bahnen unserer Feinstruktur dynamisch unmöglich.

Im Falle c) wird die Intensitätsfrage trivial, indem alle Linien verschwinden. Im Falle b) fallen einige Linien aus, die Intensität der übrigen ist statistisch bestimmt. Fall a) ist die Bedingung für die typische, rein statistische Intensitätsverteilung.

Zur quantitativen Formulierung erinnern wir an die Gleichungen[1]) für die große und kleine Achse a und b und für die numerische Exzentrizität ε einer Kepler-Ellipse unter der Wirkung einer Kernladung Ze ($Z =$ Ordnungszahl des Elementes):

$$a = (n + n')^2 \frac{a_1}{Z^2}, \quad b = n(n + n') \frac{a_1}{Z^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{n^2}{(n + n')^2}}.$$

Hier bedeutet
$$a_1 = \frac{h^2}{4 \pi^2 m e^2}$$
den Radius des ersten Bohrschen Kreises (für $n + n' = s = 1$) bei Wasserstoff. Die größte Entfernung des Elektrons vom Kern, die Apheldistanz, ist bei irgend einer Kepler-Ellipse:

$$a(1 + \varepsilon) = s^2 \frac{a_1}{Z^2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{n}{s}\right)^2}\right).$$

Ihr Maximalwert wird erreicht für die Pendelbahn ($n = 0$) und beträgt

---

[1]) Ann. d. Phys., l. c., p. 20 und 21.

$$r_{\max} = 2 s^2 \frac{a_1}{Z^2}.$$

Ihr Minimalwert tritt bei der Kreisbahn auf ($n' = 0$, $n = s$) und ist

$$r_{\min} = s^2 \frac{a_1}{Z^2}.$$

Fall a) verlangt daher, wenn wir $\lambda = R/a_1$ setzen:

$$R > 2 s^2 \frac{a_1}{Z^2} \cdots s^2 < \frac{\lambda}{2} Z^2.$$

Fall c) liegt vor, wenn

$$R < s^2 \frac{a_1}{Z^2} \cdots s^2 > \lambda Z^2.$$

Die Bedingung für Fall b) lautet:

$$2 s^2 \frac{a_1}{Z^2} > R > s^2 \frac{a_1}{Z^2} \cdots \frac{\lambda}{2} Z^2 < s^2 < \lambda Z^2.$$

λ bedeutet dabei die auf die natürliche Einheit a_1 bezogene freie Weglänge. Im Fall b) bestimmt die Gleichung

$$s^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{n^2}{s^2}}\right) = \lambda Z^2 \tag{15}$$

denjenigen Wert von n, von dem ab die Ellipse (n, n') mit der Kugel R kollidiert, derart, daß größere Werte von n möglich, kleinere Werte dynamisch behindert sind.

Die Ungleichung

$$s^2 < \frac{\lambda}{2} Z^2 \tag{a}$$

können wir als Bedingung für die Möglichkeit unserer typischen Intensitätsverteilung ansprechen. Dieselbe wird also begünstigt 1. durch einen großen Wert der freien Weglänge λ (niedrigen Druck in der Röhre), 2. durch größere Werte von Z (ionisiertes He mit $Z = 2$ günstiger als H mit $Z = 1$), 3. durch kleine Werte der Quantensumme s (die typische Intensitätsverteilung ist vornehmlich bei den ersten Serien-

gliedern zu erwarten). Natürlich ist für die Erfüllung der Ungleichung a) und die Möglichkeit der typischen Intensitätsverteilung nicht die Quantensumme s der Endbahn, sondern die größere der Anfangsbahn ausschlaggebend.

Im Falle b) fragen wir sodann im Anschluß an Gl. (15) nach denjenigen Werten von n, für welche die zugehörigen Komponenten ausfallen würden. Wir erhalten sie, indem wir in (15) das Zeichen $=$ durch $>$ ersetzen. Dieses sind die kleinen Werte 0, 1, 2 ... von n bis zu einem gewissen durch (15) bestimmten Grenzwerte, also die großen Werte s, $s-1$, $s-2 \cdots$ von n'. Wenden wir dieselbe Gleichung auf den zweiten Term (Quantensumme $r = m + m'$) an, so sehen wir, daß auch hier die großen Werte r, $r-1$, $r-2 \cdots$ von m' ausfallen müßten; und zwar würde, da $r > s$ ist, der Grenzwert für m', bis zu dem diese Komponenten unmöglich werden, niedriger liegen, als der entsprechende Grenzwert für n'. Deuten wir also diese Grenzwerte durch Überstreichen an, so würde sich für die realen Komponenten ergeben

$$(16) \qquad n' < \bar{n}', \quad m' < \bar{m}', \quad \bar{m}' < \bar{n}'.$$

Diese Bedingung ist durchaus verschieden von derjenigen Bedingung

$$(16\,a) \qquad m' \geq n',$$

die früher aus den Beobachtungen entnommen und als Quantenungleichung beschrieben wurde. Wir müssen daher schließen, daß die bisherige Betrachtung keine geeignete Grundlage abgibt für die Frage der ausfallenden Linien und für die tatsächlich beobachteten Abweichungen von der typischen Intensitätsverteilung.

In der Tat ist die bisherige Einführung einer Beschränkung der möglichen Bahnen nur eine von mehreren Möglichkeiten. Wir setzten bisher voraus: Alle Bahnen sind möglich, die innerhalb einer Kugel vom Radius R liegen, alle Bahnen sind unmöglich, die über diese Kugel hinausgreifen. Statt dessen können wir auch sagen, indem wir uns viele Hindernisse gleichmäßig im Raume verteilt denken: Alle Bahnen sind

möglich, deren Flächeninhalt kleiner ist als eine gewisse (vom Gasdruck abhängige) Fläche F, alle Bahnen sind unmöglich, deren Flächeninhalt größer ist als F.

Indem wir die oben mitgeteilten Werte von a, b und a_1 benutzen, ergibt sich als Flächeninhalt einer beliebigen Kepler-Ellipse $a b \pi = n s^3 \frac{\pi a_1^2}{Z^4}$.

Der Maximalwert dieser Fläche entsteht bei gegebenem s für $n = s$ und entspricht der Kreisbahn:

$$F_{\max} = s^4 \frac{\pi a_1^2}{Z^4}.$$

Der Minimalwert entspricht der Pendelbahn $n = 0$ oder, wenn wir diese ohnehin für unmöglich erklären, der Ellipse $n = 1$, von größter Exzentrizität

$$F_{\min} = s^3 \frac{\pi a_1^2}{Z^4}.$$

Die Bedingung für die typische Intensitätsverteilung, bei der keine Bahn dynamisch behindert ist, lautet von unserem jetzigen Standpunkte $F_{\max} < F$. Indem wir F in Teilen der Fläche des ersten Bohrschen Kreises bei Wasserstoff messen und

$$\mu = \frac{F}{\pi a_1^2}$$

setzen, definieren wir jetzt als Fall a):

a) $$s^4 < \mu Z^4.$$

Andererseits sind alle Bahnen von unserem jetzigen Standpunkt dynamisch unmöglich geworden, wenn $F_{\min} > F$. In diesem Falle sagen wir, daß Fall c) vorliegt. Die Bedingung dafür lautet

c) $$s^3 > \mu Z^4.$$

Der Fall b), wo einige Bahnen möglich, andere unterdrückt sind, ist dann gegeben durch die Ungleichung

b) $$s^4 > \mu Z^4 > s^3.$$

In diesem Falle bestimmt die Gleichung

(17) $$\bar{n} s^3 = \mu Z^4$$

denjenigen Grenzwert $\bar{n}$ von n, für welchen die Ellipse (n, n') flächengleich mit der zulässigen Fläche F werden würde, derart, daß größere Werte von n unmöglich, kleinere Werte dynamisch zulässig sein würden.

Bei dem Vergleich der jetzigen Bedingung a) mit der früheren sieht man, daß sie qualitativ dasselbe besagt wie jene. Es wird also auch jetzt 1. großes μ (niedriger Druck), 2. großes Z (höhere Kernladung), 3. kleines s (niedrige Seriennummer) die Möglichkeit der typischen Intensitätsverteilung begünstigen. Auch die jetzige Bedingung c) stimmt qualitativ mit der früheren überein. Nicht so die Bedingung b). In der Tat verhalten sich die Ellipsen in Bezug auf ihre Flächengröße umgekehrt wie in Bezug auf ihre Apheldistanz. Z. B. hat der Kreis bei gegebenem s die größte Fläche, aber die kleinste Apheldistanz, die Pendelbahn die kleinste Fläche, aber die größte Apheldistanz. Dementsprechend erklären wir jetzt für real resp. irreal die Linien mit

$$n < \bar{n} \text{ resp. } n > \bar{n}.$$

Auf die radiale Quantenzahl übertragen lautet die Bedingung für die Realität der Linien, wenn wir $\bar{n}' = s - \bar{n}$ setzen und die entsprechende Bedingung für den zweiten Term hinzufügen:

$$n' > \bar{n}', \quad m' > \bar{m}', \quad \bar{m}' > \bar{n}'. \tag{17a}$$

Diese Bedingung ist gerade entgegengesetzt zu der früheren Bedingung (16) und nähert sich (16a), ohne damit identisch zu sein.

Natürlich ist auch unser jetziger Standpunkt, bei dem wir die Flächengröße für das Ausfallen von Linien verantwortlich machen, nicht frei von Willkür. Den Bohrschen Gesichtspunkt von dem Verschwinden der höheren Serienlinien in der Geisler-Röhre begründet die jetzige Annahme ebenso gut, wie die frühere, da sie ja hinsichtlich der Bedingung c) mit ihr übereinstimmt. Ob sie mit den Intensitätsbeobachtungen verträglich ist, wird im letzten Paragraphen besprochen werden.

§ 4. Vergleich mit der Arbeit von K. Herzfeld.

Die verhältnismäßige Komplikation der Rechnungen von Herrn Herzfeld rührt daher, daß er das Element des Phasenraumes ursprünglich in rechtwinkligen Koordinaten ansetzt. Die Einführung der Quantenzahlen macht dann die Berechnung 6-reihiger Funktionaldeterminanten nötig. Wir vermieden diese, indem wir, von der Invarianz des Raumelementes Gebrauch machend, von Anfang an in Polarkoordinaten rechneten. Dann kamen wir von Gl. (9) sofort zu der Darstellung von dW in Gl. (10). Zum Vergleich mit der Herzfeldschen Gl. (13) führen wir statt n, n' die Herzfeldschen Größen C (Flächengeschwindigkeit) und E (Energie) ein. Der Zusammenhang zwischen den beiderlei Größen ist

$$-E = \frac{Nh}{(n+n')^2}, \quad 2\pi m C = nh$$

(m = Elektronenmasse, N = Rydberg-Frequenz). Hieraus folgt

$$dn + dn' = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{Nh}}{(-E)^{3/2}}\,dE, \quad dn = \frac{2\pi m}{h}\,dC,$$

$$\frac{\partial(n, n')}{\partial(C, -E)} = -\pi m \sqrt{\frac{N}{h}}\,\frac{dE}{(-E)^{3/2}}\,dC.$$

Gl. (10) geht daher über in

$$dW = -2\pi^2 m^2 h^2 \sqrt{\frac{N}{h}}\,\frac{dE}{(-E)^{3/2}}\,C\,dC$$

oder mit $N = 2\pi^2 m e^4/h^3$

$$\frac{dW}{m^3} = -\frac{2\pi^3 e^2}{\sqrt{2m}}\,\frac{dE}{(-E)^{3/2}}\,dC^2.$$

Dies stimmt mit Herzfelds Gl. (13) überein; in der Tat ist Herzfelds dw identisch mit unserem dW/m^3, da Herzfeld den Phasenraum nicht durch die Lagen- und Impulskoordinaten, sondern durch die Lagen- und Geschwindigkeits-Koordinaten bestimmt, was einen Unterschied um m^3 mit sich bringt. Außerdem fügt er einen Faktor 2 hinzu, um links- und rechtsläufige Ellipsen ($+C$ und $-C$) zu berücksichtigen.

Ferner stimmen die drei Fälle, die Herzfeld bei den (Gl. 14) und (15) unterscheidet, mit unseren drei Fallunterscheidungen a),

b), c) am Anfange des § 3 überein. In den anschließenden Energieberechnungen würde, wie Herzfeld in der Nachschrift bemerkt, nur wenig zu ändern sein, wenn die Bohrsche durch meine vollständige Quantelung ersetzt wird.

Vor allem haben wir die Schlußbemerkung Herzfelds, in welcher er meine Intensitätsvermutung (2) begründet und durch welche diese Untersuchung angeregt wurde, mit unseren einschlägigen Resultaten zu vergleichen. Herzfeld benutzt von den in § 2 betrachteten drei Möglichkeiten A), B), C) der Integration für die Quantenzahl n die letzte, integriert also von $n-1$ bis n; für die Quantenzahl n' dagegen scheint[1]) er die Integration B) (von n' bis $n'+1$) zu Grunde zu legen, um den Kreis als wahrscheinlichste Bahn zu erhalten. Wir haben von einer solchen verschiedenen Behandlung der beiden Quantenzahlen abgesehen, mußten also bei dem Verfahren C) dem Kreis die Intensität Null zuschreiben.

Von besonderem Interesse ist die Bemerkung Herzfelds, daß die Häufungsstelle der Energie, welche bei den unendlich fernen Bahnen liegt, nicht dem Werte 0, sondern dem Maximalwerte 1 des Boltzmannschen Exponentialfaktors entspricht, und daß hieraus für alle endlichen Bahnen eine statistische Instabilität entspringen würde, wenn man nicht die weit entfernten Bahnen durch eine Bedingung von der Art der freien Weglänge einschränkt. Dieser Gesichtspunkt kommt auch für uns in Frage, wenn wir nach der relativen Intensität der verschiedenen Serienglieder fragen. Unter Anwendung des Boltzmannschen Prinzips müßten die Serienglieder um so intensiver sein, je höher ihre Ordnungsnummer ist! Zur Vermeidung dieses paradoxen Schlusses müssen auch wir mit Herzfeld auf die Behinderung der weit entfernten Bahnen durch Zusammenstöße zurückgreifen, wobei wegen der numerischen Verhältnisse bei diesem Vorgang Gl. (18) im nächsten Paragraphen zu berücksichtigen ist.

---

[1]) Wie ich von Herrn Herzfeld erfahre, wird er näheres über die von ihm benutzte Einteilung des Phasenraumes demnächst an anderer Stelle mitteilen.

§ 5. Die Paschenschen Intensitätsmessungen.

Wir beziehen uns auf die Beobachtungen von Paschen bei *He*, obwohl sie durch noch nicht publizierte photometrische Messungen bereits überholt sind; die Fig. 3, 4, 5 sind aus meiner Annalenarbeit hier reproduziert, mit dem Unterschiede,

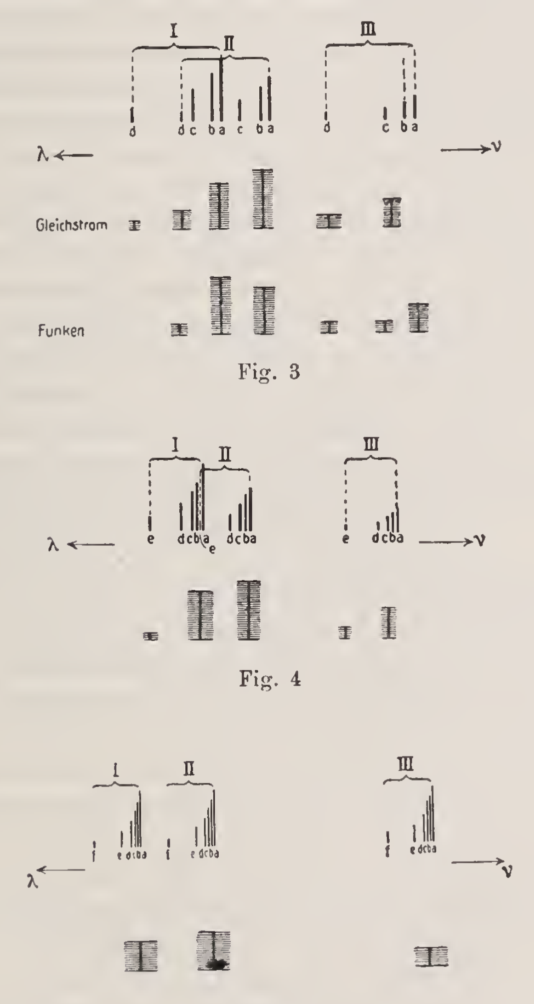


Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

daß die theoretischen Intensitäten (oberste Zeile) hier sämtlich im Sinne der Regel (2) eingezeichnet sind, während sie dort wegen der vermuteten Quantenungleichungen teilweise punktiert waren.

Merkwürdigerweise ist das Funkenbild in Fig. 3 einfacher und regelmäßiger, als diejenigen Bilder, die der gewöhnlichen Anregung durch Gleichstrom entsprechen. Wir müssen daher das Funkenbild als die typische Intensitätsverteilung ansehen. Da hier keine Linien ausfallen, werden wir annehmen, daß unsere Bedingung a), vgl. den vorigen Paragraphen, erfüllt ist. (Daß die Linie I d in Fig. 3 nicht beobachtet wurde, braucht nicht als wirkliches Ausfallen angesehen zu werden.)

In der Tat stuft sich die Intensität im Triplett I, II, III und im Quartett a, b, c, d nach der erwarteten Reihenfolge regelmäßig ab. Ob sich in quantitativer Hinsicht die beobachteten Intensitäten unserer Erwartung fügen und ob (vgl. die Zusammenstellung am Schluß des § 2) sie besser der Formel (III), (5) oder (13) folgen, könnte nur photometrisch entschieden werden. Immerhin lassen sich schon jetzt die in der Einleitung gestellten Fragen mit einiger Sicherheit beantworten.

(I) Die Funkenanregung realisiert die einfachsten Umstände, unter denen eine typische Intensitätsverteilung zustande kommt.

(II) Es steht vorläufig nichts im Wege, die Wahrscheinlichkeit für Anfangs- und Endbahn in diesem Falle als unabhängig voneinander anzusehen und die beobachtete Intensität durch das Produkt dieser beiden Wahrscheinlichkeiten zu erklären.

(III) Die Intensitätsfolge genügt ungefähr unserer Erwartung (III) oder einem ähnlichen Gesetz, wie es in (5) oder (13) formuliert wurde.

Wir prüfen sodann, ob unsere Bedingung a) des vorigen Paragraphen, welche die typische Intensitätsverteilung begünstigen sollte, bei der Funkenanregung erfüllt ist. Wir verlangten 1. niedrigen Druck, große freie Weglänge. Dieser Umstand ist bei der Funkenanregung als vorzugsweise wirksam

nicht nachzuweisen. Vielmehr betont Paschen, daß der Gasdruck beim Funkenbild und bei dem (nicht-typischen) Gleichstrombild ungefähr gleich war (0,1 bis 1 mm *Hg*). Es müßte denn sein, daß die bei der Entladung frei werdenden Verunreinigungen bei der kurzen Funkenanregung unwirksam bleiben, dagegen das Gleichstrombild bei längerer Dauer beeinflussen. 2. Der Umstand, daß bei den Beobachtungen $Z = 2$ war, begünstigt zwar die typische Intensitätsverteilung, müßte aber im Gleichstromfalle ebenso wirksam sein wie bei der Funkenanregung. 3. Nur von dem ersten Gliede $m + m' = 4$ der Serie konnte Paschen ein lichtstarkes Funkenbild erhalten; „bei den höheren Gliedern nahm die Intensität stark ab, um so mehr, je höher die Ordnungsnummer.“ Dieser Umstand entspricht unserer Erwartung (vgl. den Faktor s^2 oder s^4 bei a). Trotzdem wollen wir nicht behaupten, daß unsere theoretische Bedingung a) durch den Versuch bestätigt wird. Dazu ist der Vorgang bei der Funkenentladung noch zu wenig geklärt. Wir wollen also auch nicht behaupten, daß von hier aus die Frage (IV) der Einleitung zu bejahen sei, müssen vielmehr konstatieren, daß sich aus den Bedingungen für das Eintreten des Funkenbildes auf Hindernisse für die freie Ausbildung der Elektronenbahnen nicht schließen lasse.

Wir betrachten nun die Gleichstromaufnahmen in Fig. 3, 4, 5. Hier fällt zunächst in die Augen, daß die Liniengruppe I gegenüber der Liniengruppe II geschwächt ist. Man sieht dies besonders deutlich an Fig. 5, wo (entsprechend dem darüber stehenden theoretischen Bilde) jede dieser Gruppen in eine Linie verschmolzen ist. Denkt man sich aber hier und in den anderen Gleichstrombildern die Intensität von I verdoppelt, so ergibt sich wieder ein regelmäßiger Intensitätsabfall von I über II nach III. Dieser Umstand erinnert an unsere Resultate (7) und (11) (vgl. die Zusammenstellung am Schluß von § 2), die wir als abgeänderten Typus zusammenfaßten. Derselbe unterschied sich von dem reinen Typus der Intensitätsverteilung durch die halbe Wertung des zur Quantenzahl 0 gehörigen Phasenbereiches und kann daher durch Verdoppelung der zur

Zahl 0 gehörigen Intensitäten in jenen reinen Typus übergeführt werden. Der abgeänderte Typus ergab sich bei der Abzählung im kontinuierlichen Phasenraum (wenn man diese überhaupt zulassen will) ziemlich ungezwungen. Ist es denkbar, daß bei Gleichstrom-Anregung der Phasenraum in solcher Weise kontinuierlich, bei Funkenanregung quantenhaft diskontinuierlich zu werten sei? Trotz der inneren Unwahrscheinlichkeit dieser Hypothese und trotzdem sie jedenfalls nicht ausreicht, um alle Unterschiede zwischen Gleichstrom- und Funkenbild zu erklären, sollte sie doch an späteren genaueren Messungen geprüft werden, um so mehr, als auch die beiden Planckschen Theorien von 1906 und 1913 in demselben Gegensatz einer diskontinuierlichen und kontinuierlichen Wertung des Phasenraumes zueinander stehen.

Der zweite Gesichtspunkt, unter dem wir die Gleichstrom-Aufnahmen betrachten, ist derjenige unserer Frage (IV) der Einleitung: Enthalten sie in den ausfallenden Linien Anzeichen für die Behinderung der Bahnen und für die Wirksamkeit einer Art von freier Weglänge?

Als irreale Linien, die in der Beobachtung ausfallen, sind zweifellos anzusehen die Linien III ab in Fig. 3, wahrscheinlich auch die Linien III ab in Fig. 4. Die ersteren gehören zu den Quantenzahlen

$$n = 1,\ n' = 2 \begin{cases} m = 4,\ m' = 0 \\ m = 3,\ m' = 1. \end{cases}$$

Es werden also nicht die großen, sondern die kleinen Werte von m' behindert. Dies widerspricht dem ersten im vorigen Paragraphen eingenommenen Standpunkt (vgl. die Ungleichungen (16)), und könnte andererseits mit dem zweiten Standpunkte (vgl. (17a)) vereinbart werden. Indessen ist zu beachten: Wenn die Linien III ab ausfallen, so sollten von diesem Standpunkte aus auch die Linien II ab und I ab irreal werden, da sie gleiche Größe der Anfangsbahn haben. Das ist nach Fig. 3 und 4 sicher nicht der Fall. Auf Grund der Erfahrung über das Ausfallen einzelner Komponenten

im Gleichstrombilde läßt sich daher die Frage (IV) der Einleitung nicht bejahen.

Ein Blick auf die numerischen Verhältnisse zeigt, daß dieses negative Resultat in der Tat zu erwarten ist, wenn wir die für die Behinderung der Bahnen maßgebende Länge R bzw. Fläche F von der Größenordnung der gaskinetisch bestimmten freien Weglänge bzw. deren Quadrat annehmen. Bei 1 mm Hg ist die freie Weglänge in Luft etwa 5.10^{-4} cm; a_1 berechnet sich aus e, h und m zu $0{,}55.10^{-8}$ cm, also wird

$$\lambda = \frac{R}{a_1} = 10^5 \text{ und etwa } \mu = \frac{\lambda^2}{\pi} = \frac{10^{10}}{\pi}.$$

Das Ausfallen einzelner Linien würde einsetzen an der Grenze des Falles a) und b), also für

$$s^2 = \frac{\lambda}{2} Z^2 \text{ bzw. } s^4 = \mu Z^4.$$

Dies ergibt in beiden Fällen mit $Z = 2$ etwa

$$s^2 = 2.10^5. \tag{18}$$

Eine derartige Einschränkung ist also für alle zur Beobachtung kommenden Linien völlig wirkungslos — es sei denn, daß man die hier wirksame Länge R viel kleiner voraussetzt als die gewöhnliche freie Weglänge.

Dagegen wird die Frage der Realität oder Irrealität der Komponenten der Gleichstrombilder, wie früher auseinandergesetzt, einstweilen befriedigend wiedergegeben durch die Hypothese der Quantenungleichungen $m' \geqq n'$, d. h. das radiale Quantum darf als wesentlich positive Größe bei den Quantensprüngen nicht zunehmen. Es wäre sehr erfreulich, wenn man diese seltsame Hypothese entbehren und auf statistische Gründe zurückführen könnte. Die Prüfung dieser Frage, die in der Einleitung in die Unterfragen (V) und (VI) auseinandergelegt wurde, bildet ein hauptsächliches Ziel der gegenwärtigen Überlegungen. Frage (V) lautet so: kann man für die Komponenten einer Feinstruktur setzen

$$J = W(n, n') \cdot W(m, m'), \tag{19}$$

so daß die Wahrscheinlichkeit $W(n, n')$ der Endbahn von der Wahrscheinlichkeit $W(m, m')$ der Anfangsbahn unabhängig ist? Nur in diesem Falle ist die Intensitätsfrage rein statistisch zugänglich. Die Art der Funktion W kann dabei ganz offen gelassen werden; auch entscheidet eine etwaige Bestimmung von $W(n, n')$ noch nichts über die Werte von $W(m, m')$, da letztere Größe zu anderen Werten der Argumente gehört wie erstere.

Um den Ansatz (19) zu prüfen, hätte man z. B. in Fig. 3 zu bilden die Intensitätsverhältnisse von

$$W(3, 0) : W(2, 1) : W(1, 2) =$$
$$\mathrm{I\,a : II\,a : III\,a = I\,b : II\,b : III\,b} =$$
$$\mathrm{I\,c : II\,c : III\,c = I\,d : II\,d : III\,d}.$$

Durch diese Proportionen würde man die Intensitätsverteilung im Triplett, unter Elimination derjenigen im Quartett, gewinnen. Nur wenn diese Verhältnisse sich innerhalb der Beobachtungsfehler als gleich ergeben, kann man von einer Intensitätsverteilung $W(n, n')$ im Triplett reden. Ebenso müßte man für das Quartett finden

$$W(4,0) : W(3,1) : W(2,2) : W(1,3) =$$
$$\mathrm{I\,a : I\,b : I\,c : I\,d = II\,a : II\,b : II\,c : II\,d = III\,a : III\,b : III\,c : III\,d}.$$

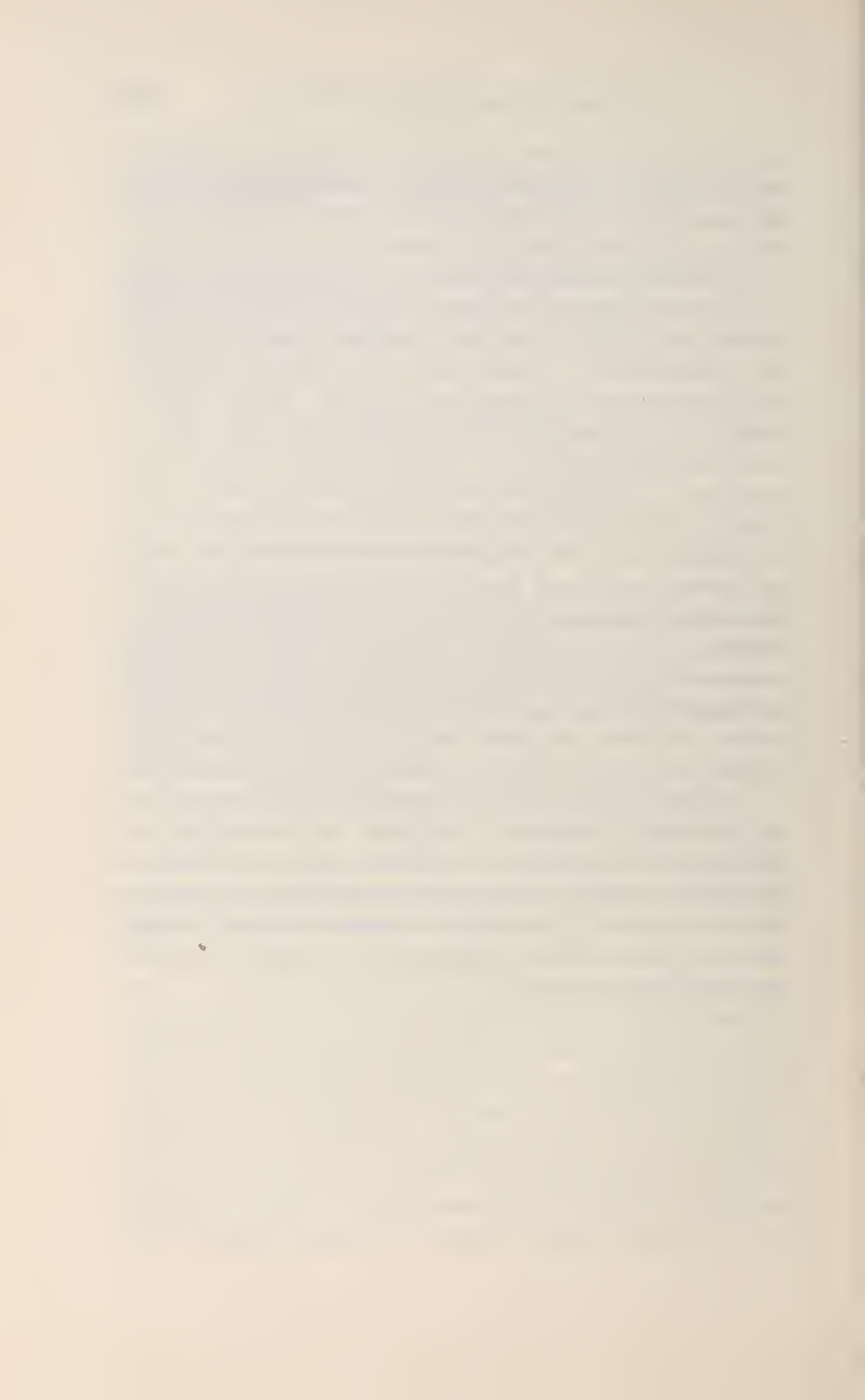
Nur wenn diese Verhältnisse merklich gleich ausfallen, gibt es eine Intensitätsverteilung im Quartett und läßt sich dieselbe statistisch fassen.

Die Frage so rigoros stellen heißt wohl, sie verneinen. Es scheint nach dem Anblick von Fig. 3 etc. ausgeschlossen, daß auch bei weiterer Trennung und Photometrierung der Linien die hier geforderten Gesetzmäßigkeiten sich herausstellen könnten. Wir sind also geneigt, die Frage (V) zu verneinen und (VI) zu bejahen: Die Wahrscheinlichkeiten von Anfangs- und Endbahn bedingen sich wechselweise durch unbekannte dynamische Gesetze nach Art unserer Quantenungleichungen. Es ist klar, daß die Erforschung dieser Gesetze äußerst lehrreich werden

kann für das Verständnis des Quantensprunges im Bohrschen Modell und für die eingangs geforderte Ausgleichung zwischen der quantentheoretischen und der schwingungstheoretischen Auffassung der Lichtemission. —

Zu ähnlichen Schlüssen hat auch die sorgsame Intensitätsuntersuchung geführt, die Epstein beim Stark-Effekt vorgenommen hat. Wollte man hier zunächst jeder Kombination von Quantenzahlen das gleiche Gewicht beilegen und daher jede Komponente mit derjenigen Intensität belegen, die der Anzahl ihrer Entstehungsarten entspricht, so käme man zu einer beträchtlichen Zahl von Komponenten, die nicht beobachtet sind. Die Intensitätsverteilung im Stark-Effekt ist also in unserem Sinne keine typische und ist nicht statistisch zu erklären. Epstein benutzt daher meine Quantenungleichungen („Auswahlprinzip") und kommt dann im wesentlichen auf die beobachtete Komponentenzahl. Um einzelne Abweichungen zu erklären, nimmt er überdies an, daß die azimutale Quantenungleichung um eine Einheit durchbrochen werden könne, wenn ein besonders großer Quantensprung zur Erzeugung der betreffenden Linie führt. Allgemein findet er, daß starke Intensitäten cäteris paribus mit großen Quantensprüngen verbunden sind.

Während also bei den Paschenschen Beobachtungen der rein statistische Standpunkt wenigstens im Funkenbilde ausreichte, genügt die Statistik bei den Starkschen Beobachtungen in keiner Weise, sondern erfordert auch nach Epstein dynamische Hülfsannahmen (Quantenungleichungen, Größe der Quantensprünge), welche auf eine Wechselbeziehung zwischen Anfangs- und Endbahn hinweisen.



Ethnologisch-Mathematisches.

Von **Siegmund Günther.**

Vorgetragen in der Sitzung am 3. März 1917.

Die Völkerkunde betrachtet es seit einigen Jahrzehnten als ihre Aufgabe, die Rechtsansprüche jener beiden Theorien gegeneinander abzuwägen, welche für das Aufkommen irgend einer bedeutsamen Neuerung bei Natur- und Halbkulturvölkern aufgestellt worden sind[1]). Der Auffassung, daß der nämliche Gedanke — denn auch dem ersten Auftreten irgend eines Gebrauchsgegenstandes muß doch eine Ideenverknüpfung vorausgehen — an zwei oft weit auseinander liegenden Orten entstehen könne, ohne daß irgend ein Zusammenhang zwischen beiden Akten bestehe, begegnen wir bereits bei A. v. Humboldt[2])

[1]) Einen sehr guten Überblick über den augenblicklichen Stand der Frage gewährt folgende Schrift: J. Eisenstädter, Elementargedanke und Übertragungstheorie in der Völkerkunde, Stuttgart 1912 (G. Buschans Studien und Forschungen zur Menschen- und Völkerkunde, XI). Dieselbe, ursprünglich Inauguraldissertation, ist erwachsen aus einer Preisfrage, welche von der Technischen Hochschule München im Jahre 1906 gestellt worden war. Hiezu wiederum hatte den ersten Anlaß gegeben die nachstehende Bearbeitung gewisser Grundprobleme: S. Günther, Ziele, Richtpunkte und Methoden der modernen Völkerkunde, Stuttgart 1904. Gründlich unterrichtet hierüber auch: G. Thilenius, Das Hamburgische Museum für Völkerkunde, Berlin 1916, S. 30 ff.

[2]) Vgl. S. Günther, A. v. Humboldts Beziehungen zur Anthropologie und Ethnographie, Korrespondenzblatt für Anthropologie, 1903, S. 46 ff. Gewisse geometrische Verzierungen auf Urnen in verschiedenen Erdteilen hatten dem großen Naturforscher die Vertretung dieses Standpunktes nahegelegt.

und, schärfer umrissen, bei J. Prichard[1]); die beiden Möglichkeiten, daß nämlich neben der spontanen Entstehung auch ein Erfinder und ein Empfänger angenommen werden müsse, ist von E. B. Tylor[2]) zuerst in bestimmte Erwägung gezogen worden. Mehr ein Anhänger dieser letzteren Ansicht, hat er gleichwohl kein abschließendes Urteil für oder gegen die eine oder andere abgegeben. Diese Gegensätzlichkeit entwickelte sich erst, zugleich mit dem gewaltigen Fortschritte in der Sammlung ethnographischer Tatsachen, im Laufe der siebziger Jahre des vorigen Jahrhunderts und gipfelte in den Namen der beiden Forscher, welche auf grund tiefer Studien ihre sich gegenüber stehenden Doktrinen entwickelten. Adolf Bastians Lehre vom Völker- oder Elementargedanken wurde durch Friedrich Ratzels Übertragungs- oder Entlehnungstheorie entgegengetreten.

Die erstgenannte hat ihr Begründer in verschiedenen und teilweise umfangreichen Veröffentlichungen niedergelegt[3]), ohne ihr doch aus Gründen, welche jedem Ethnologen wohl bekannt sind, jenes Maß von Anerkennung oder auch nur Verständnis zu erringen, zu welchem die Originalität und das geradezu staunenswerte Wissen des Altmeisters der deutschen Völkerkunde unter anderen Umständen notwendig hätten führen müssen. Geradezu selbst erdrückt von der ungeheuren Stoffmasse, die er in langem Leben und auf weltumspannenden Reisen zusammengebracht hatte, gelang es ihm nicht, die Grundanschauung, die er sich gebildet, mit solcher Klarheit herauszuarbeiten, daß auch weitere Kreise in die Lage versetzt worden wären, sich ein durchaus eindeutiges Bild von dem, was der

[1]) Prichard, Researches into the Physical History of Mankind, London 1813, a. a. St. (deutsche Übertragung von Rud. Wagner, Leipzig 1840, 1. Band).

[2]) Tylor, Researches into the early History of Mankind, London 1865.

[3]) Am meisten kommt in Betracht: Bastian, Der Völkergedanke im Aufbau einer Wissenschaft vom Menschen, Leipzig 1881. Der Autor hielt im gleichen Jahre auf dem ersten Deutschen Geographentage (Berlin) einen Vortrag, der beweisen sollte, es müsse „unter gleichartigen Bedingungen ein gleichartiger Menschengedanke“ hervortreten.

Autor anstrebte, zu machen. Da andererseits sein Gegner die Gabe einer anregenden und überzeugenden Schreibart vollauf besaß, da er ferner als trefflicher Lehrer eine Reihe jüngerer Kräfte für die weitere Ausführung dessen, was er selbst schon bei verschiedenen Gelegenheiten nicht nur geäußert[1]), sondern bis ins einzelnste durchgearbeitet[2]) hatte, heranzuziehen verstand, und da, was die Hauptsache, mehrere der auf solche Weise behandelten Fälle ohne allen Zweifel für die Annahme einer ausgedehnten Verpflanzung beweiskräftig waren, so konnte es nicht fehlen, daß Ratzels Methodik sich gegenüber der aphoristischen Darstellung Bastians durchsetzte. Allein zur Entscheidung konnte es schon aus dem nahe liegenden Grunde nicht kommen, daß eben nur Einzelerscheinungen der Prüfung unterstellt wurden, aus denen sich keine allgemeine Schlußfolgerung ableiten ließ. So ist denn auch in neuester Zeit mehr und mehr die Überzeugung durchgedrungen: Keine der beiden Deutungen ist für sich in absolutem Rechte, und jedes einzelne Vorkommnis bedarf auch einer eigenen Untersuchung, inwieweit es dieser oder jener Alternative unterzuordnen ist. Eine gewisse Einseitigkeit haftet, wie das ja bei allen wichtigeren Erscheinungen der Wissenschaftsgeschichte wahrzunehmen ist, beiden Lehren an[3]), und diese abzustreifen, ist eben eine der obersten Aufgaben fortschreitenden Eindringens in die Geheimnisse des Völkerlebens.

Am deutlichsten spricht für den Bereich der Anwendungen des Völkergedankens eine Erklärung, die einer der gründlichsten Kenner der Sache, K. von den Steinen, anläßlich seiner auf Bastian gehaltenen Gedächtnisrede abgegeben

---

[1]) Eben als Vertreter der Erdkunde läßt Ratzel (Anthropogeographie, 2. Band, Leipzig 1889, S. VIII) mit Bewußtsein seine „geographische“ Methode die — von ihm so bezeichnete — „psychologische“ bekämpfen.

[2]) A. a. O., passim. Der zusammenfassende Titel ist: „Die geographische Verbreitung von Völkermerkmalen“.

[3]) So wirft H. Schurtzs treffliches Werk (Urgeschichte der Kultur, Leipzig 1900, S. 49) den Aufstellungen Bastians solche Einseitigkeit vor, ohne indessen seinerseits in deren Bekämpfung eben diesen Fehler zu vermeiden.

hat[1]). „Am reinsten“, heißt es da, „vermag der Ethnologe die Elementargedanken abzuscheiden aus den psychischen Leistungen der Naturvölker, in Gestalt der einfachsten Elemente ihrer religiösen Vorstellungen, ihrer sozialen Einrichtungen, ihrer Wirtschaftsformen, ihrer ästhetischen Regungen, ihrer technischen Fertigkeiten.“ Und hiezu gehört in allererster Linie alles, was sich auf gewisse Uranfänge arithmetischer und geometrischer Geistestätigkeit bezieht[2]). Von dieser letzteren soll hier abgesehen werden, wiewohl da noch ein weites Forschungsfeld sich eröffnet, das gar manche Ausbeute verspricht[3]). Die arithmetische Seite dagegen soll uns an diesem Orte besonders beschäftigen.

In dieser Beziehung stehen wertvolle Vorarbeiten zur Verfügung, welche uns über die primitiven Leistungen der Völker aufklären. Insbesondere ist, wenn man auch nicht mit allen Einzelheiten einverstanden zu sein braucht, von Wert, was H. Schubert[4]), W. Mac Gee[5]) und zumal L. Frobenius[6])

---

[1]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde, 1905, S. 169 ff. Mit Fug wird betont, daß die „einfachsten Denkmöglichkeiten“ bald erschöpft und damit der ganzen Problemstellung und Problembehandlung gewisse Grenzen gezogen sind.

[2]) Vgl. S. Günther, Die Anfänge des Zählens, Rechnens und Messens im Lichte der vergleichenden Völkerkunde, Korrespondenzbl. f. Anthropol., 1904, S. 133 ff.

[3]) Schon vor langer Zeit wurde darauf hingewiesen, daß ein Verfahren zur Messung einer Flußbreite, welches dereinst den jetzt fast ausgestorbenen Shoshone-Indianern geläufig war, vollständig dem der Feldmesser der späteren Kaiserzeit analog ist (Marryat, Narrative of the Travels and Adventures of Monsieur Violet, deutsche Tauchnitz-Ausgabe, S. 64 ff.; M. Cantor, Die römischen Agrimensoren und deren Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst, Leipzig 1875, S. 108; S. Günther, Rezension hiezu, Beilage der Allgemeinen Zeitung, 21. März 1876).

[4]) H. Schubert, Zählen und Zahl; eine kulturgeschichtliche Studie, Hamburg 1887; ders., Das Zählen, Neumayers Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen, 2. Auflage, Berlin 1888.

[5]) W. Mac Gee, The Beginning of Mathematics, American Anthropologist, (2) 9. Band, Nr. 4.

[6]) L. Frobenius, Die Mathematik der Ozeanier (Allgemeinverständliche naturwissenschaftliche Abhandlungen), Berlin 1900.

hierüber geschrieben haben. Der letztere hat es mit einem Erdraume zu tun, der für die Erkenntnis des Übertragungsprinzips eine hervorragende Wichtigkeit beanspruchen darf, denn wir wissen, daß das Gesamtgebiet des Stillen und Indischen Ozeans der Schauplatz der gewaltigsten maritimen Völkerverschiebungen war, gegen deren Ausdehnung diejenige der sogenannten festländischen „Völkerwanderung" ganz in den Hintergrund tritt[1]). Wenn wir also innerhalb dieses gigantischen Bereiches Analogien beobachten, so hat die Annahme, es liege da oder dort eine autonome Entstehung vor, von vornherein etwas gegen sich selbst in den Augen desjenigen, der sich die volle Unparteilichkeit in der Beurteilung der Zusammenhänge oder Nicht-Zusammenhänge bewahren möchte.

Ganz anders liegen die Dinge, wenn man zwei Völker miteinander zu vergleichen Ursache hat, welche so weit voneinander entfernt wohnen, von je her aber auch wohnten, daß die Möglichkeit, es habe in früheren Zeiten irgendwelche Beeinflussung Platz gegriffen, völlig auszuschließen ist. Zwei solche Völkergruppen sind die Bewohner Vorderindiens und die Bewohner der mittelamerikanischen Ostküste. Zwischen ihnen eine Verbindung herstellen zu wollen, verbietet sich ganz von selbst, man müßte denn zu den gewagtesten und unwissenschaftlichsten Hypothesen seine Zuflucht nehmen wollen. Denn das Zeitalter der Atlantis- oder Meropissage, wie sie uns bei Plato oder Theopompus begegnen[2]), ist doch wohl endgiltig vorüber. Selbst wenn man sich jedoch auf derartig abenteuerliche Geschichtskonstruktionen einzulassen

[1]) Es sind namentlich auch linguistische Gesichtspunkte, die bei derartigen Zusammenhangsprüfungen beachtet sein wollen (G. v. d. Gabelentz-A. B. Meyer, Beiträge zur Kenntnis der melanesischen, mikronesischen und papuanischen Sprachen, Leipzig 1876; H. Schnorr von Carolsfeld, Beiträge zur Sprachenkunde Ozeaniens, Sitzungsber. d. K. Bayer. Akademie d. Wissenschaften, Philol.-Histor. Klasse, 1890).

[2]) Die historische Eigenart dieser geographischen Märchen, deren Nachwirkung sich bis in eine recht späte Zeit verfolgen läßt, erörtert des näheren O. Zoeckler (Geschichte der Beziehungen zwischen Theologie und Naturwissenschaft, 1. Abteilung, Gütersloh 1877, S. 127 ff.).

Lust hätte, würde man nicht zum gewünschten Ziele kommen, da sich diese lediglich auf den Atlantischen Ozean beziehen, während zwischen den erwähnten beiden Völkern neben jenem Weltmeere auch noch der ganze Kontinent Afrika enthalten ist. Es handelt sich nämlich einerseits um die Hindus und andererseits um die Mayas der Halbinsel Yukatán[1]). Von der verhältnismäßig hohen Kultur der letzteren war bereits Columbus überrascht, als er anläßlich seiner vierten Reise ihre Küste berührte.

Sowohl in Hindostan, wie in Zentralamerika kannte und verwandte man zu einer Zeit, da im Abendlande noch niemand an die Abkehr von den überlieferten schwerfälligen Zahlenschreib- und Rechnungsweisen dachte, das Positionssystem mit Inbegriff der Null, ohne welche ja auch an eine konsequente Ausnützung des Begriffes Stellenwert gar nicht zu denken wäre. Was aber die Unwahrscheinlichkeit, ja Unmöglichkeit einer Entlehnung außer allen Zweifel setzt, das ist der Umstand, daß die zwei einschlägigen Völker nicht mit der nämlichen Grundzahl arbeiteten, sondern das einemal vom Zehner-, das anderemal vom Zwanzigersysteme ausgingen. Unwillkürlich nehmen wohl die meisten Menschen, die mit den Grundlehren unserer heutigen Arithmetik vertrauten nicht ausgenommen, als selbstverständlich an, es müsse der Gebrauch der Null notwendig auf die Zahl 10 als Basis hinweisen[2]).

---

[1]) Vgl. hiezu: S. Ruge, Columbus, Berlin 1902, S. 75 ff. Beiläufig bemerkt, reichten die Mayas, die nicht ein geschlossenes Volk, sondern eine Gruppe von kleineren Völkerschaften mit selbständiger Sprache und Schrift waren, tief in angrenzende Gebiete (Guatemala und Honduras) hinein.

[2]) Die Vermutung, es spiele die Null auch bei den ältesten Kulturvölkern schon eine gewisse Rolle, hat sich bisher nicht bestätigt. Gewiß hatten die Ägypter der späteren Zeit ein hieroglyphisches Zeichen für „Nichts“ (R. Lepsius, Über eine hieroglyphische Inschrift am Tempel zu Edfu, Berlin 1855, S. 6 ff.), aber gerechnet konnte damit nicht werden. Auch bei den Babyloniern, deren für rein astronomische Zwecke bestimmtes Sexagesimalsystem ein hohes Alter hatte, mag allenfalls eine Andeutung des Stellenwertes gefunden werden, der aber ohne ein eigenes Zeichen für Null unfruchtbar blieb.

Wie wenig diese Voraussetzung zutrifft, das wird zwar theoretisch leicht zu erweisen sein; in der Rechnungspraxis hingegen wird es durch die hier in Rede stehenden Tatsachen mit vollster Klarheit dargetan. Um es kurz zu sagen: Die Inder besaßen ein Dezimal-, die Mayas ein Vigesimalsystem[1]).

Daß wir durch arabische Vermittelung die geistvolle indische Erfindung erhalten und dann allerdings auf europäischem Boden rasch vervollkommnet haben, ist bekannt. Wie freilich diese gewaltige Neuerung angebahnt und durchgesetzt ward, darüber vermögen wir nichts bestimmtes auszusagen[2]), und auch über den Zeitpunkt derselben gehen die Meinungen sehr auseinander. „Wenn irgend eine Erfindung echt indischen Charakter trägt, so ist es die, dem Nichts einen Wert zu geben und durch das Nichtsein erst die Vollendung des Etwas zu bewirken.“[3]) Vor dem VII. Jahrhundert unserer Zeitrechnung

---

[1]) Durch A. F. Pott (Die quinare und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Weltteile, Halle a. S. 1847; eine Ergänzung erschien am gleichen Orte 1868) schien die Entscheidung dafür erbracht zu sein, daß es nur Fünfer-, Zehner- und Zwanzigersysteme auf der Erde gäbe, wie dies bereits A. v. Humboldt behauptet hatte (Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwertes in den indischen Zahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 4. Band, S. 203 ff.). Es hat sich indessen, wie Eisenstädter (a. a. O., S. 163 ff.) ausführt, als gewiß herausgestellt, daß es auch Binärsysteme bei verschiedenen Völkern gibt, so daß die Grundzahl 2 nicht blos für geistreiche Spekulationen, wie bei Leibniz und Caramuel v. Lobkowitz, sondern auch für den Tagesgebrauch diente und dient.

[2]) Vgl. hierüber E. C. Bayley, On the Genealogy of modern Numerals, Journal of the Royal Asiatic Society, (2) 14. Band, S. 335 ff.; 15. Band, S. 1 ff. Cajori (a. a. O.) weist insbesondere auch auf eine — unter den obwaltenden Umständen leider nicht erreichbare — Monographie des Angloinders G. R. Kaye hin (Indian Mathematics, Calcutta-Simla 1915).

[3]) H. Brockhaus, Zur Geschichte des indischen Zahlensystems, Zeitschrift für die Kunde des Morgenlandes, 4. Band, S. 77 ff. Die eigenen Untersuchungen dieses Orientalisten knüpfen an diejenigen des Dänen Rask an.

fehlen bestimmte Zeichen dafür, daß dieser Vorgang sich vollzogen hatte[1]), so daß mithin jedenfalls vor diesem Termine auch an keine Übertragung nach irgend einer anderen Stelle hin gedacht werden darf. Ziemlich bald nachher sind auch die Araber mit dem bekannt geworden, was ihre östlichen Nachbarn ausgedacht hatten[2]). Und von da in den Okzident dauerte es, wenngleich die Kreuzzüge wohl fördernd eingegriffen haben mögen, ziemlich lange, bis sich das von der Antike überkommene und geschickt gehandhabte Abakusrechnen durch die neue indische Logistik aus dem Sattel heben ließ. Es gewährt hohes Interesse, diesen Prozeß an der Hand der allerdings nur spärlich vorhandenen Beweisstücke zu verfolgen[3]). Eine erste Spur deckte M. Cantor schon vor Jahrzehnten bei dem Klosterlehrer Radulf (Raoul) von Laon auf, der um 1131 gestorben ist[4]); der Araber gedenkt er übrigens nicht, so wenig wie der doch mit der Gelehrtensprache des Ostens wohl vertraute Atelhart von Bath, dieser Typus des Berufsübersetzers. Was Radulf als „Rota“ bezeichnet, ist nur ein Rechnungsbehelf. Mit dem Anfange des XIII. Jahrhunderts machte sodann Lionardo Fibonacci, der als Pisaner an der Küste Nordafrikas mit den dort herrschenden Rechnungsmethoden eingehende Bekanntschaft geschlossen hatte, Ernst mit der praktischen Durchführung des „Nullrechnens“, indem

---

[1]) H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874, S. 44 ff.

[2]) M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 1. Band, Leipzig 1904 (3. Auflage), passim.

[3]) Es handelt sich da vom Übergange der die römische Rechentafel in Ehren haltenden „Abazisten“ zu den bereits dem neuen Fahrwasser sich anvertrauenden „Algorithmikern“ (S. Günther, Geschichte des mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter bis 1520, Berlin 1887 [Band III der „Monumenta Germaniae Paedagogica“], S. 69 ff.). Die spätere Schule wird so genannt nach dem berühmten Araber Môhâmmed ibn Mûsâ Alkhwarîzmî, dessen Nationalitätsbezeichnung („der Chowaresmier“) in einen „Algorithmus“ — jetzt bekanntlich ein in durchaus verschiedenem Sinne gebrauchtes Wort — verketzert wurde.

[4]) Cantor, Mathematische Beiträge znm Kulturleben der Völker, Halle a. S. 1864, S. 331.

er sich auf die arabische Benennung der Null als „zephirum“ bezieht[1]). Daraus ist dann das griechische „*τζίφρα*“ entstanden[2]), welches allmählich ganz allgemein die dem Zehnersysteme angepaßten Zahlzeichen in „Ziffern“ übergehen ließ[3]). Wie dann nach und nach in Italien durch Borgi, Tagliente, Luca Paciulo u. a. die neue Rechnungsweise sich einbürgerte[4]) und von da aus nach den angrenzenden Ländern übergriff, kann man jetzt genauer verfolgen. Über Westasien und Europa hinaus drang sie nicht vor, und selbst in dem doch näher gelegenen, durch Handelsbeziehungen noch näher gerückten China dürfte nach E. Biot[5]) das indische Vorbild erst in jüngerer Vergangenheit nachgeahmt worden sein, und zwar auch nur der unmittelbaren Anwendung wegen („Kaufmannsziffern“).

Es ist somit jetzt der — im Grunde beinahe überflüssige — Nachweis für die These erbracht, daß das indische Positionssystem nur schüchtern und langsam den Weg gemacht hat, der in der Eroberung der ganzen Kulturwelt gipfeln sollte, und so wenden wir uns jetzt den Mayas zu, um uns über deren ganz anders geartete Verwirklichung des Stellenwertgedankens ein Urteil bilden zu können. Hiezu dienen zwei erst der neuesten Zeit angehörige Aufsätze[6]), denen jedoch der so häufig wieder-

---

1) Cantor, Vorlesungen usw., 2. Band, Leipzig 1900, S. 8 ff.

2) Vgl. C. J. Gerhardt, Das Rechenbuch des Maximus Planudes, nach den Handschriften der Kgl. Bibliothek zu Paris herausgegeben, Halle a. S. 1865, S. 1: „*τιθέασι δὲ καὶ ἕτερόν τε σχῆμα ὃ καλοῦσι τζίφραν, κατ' Ἰνδοὺς σημεῖον οὐδέν.*“

3) Zunächst wurde die Null auch ohne besondere Rücksicht auf den Stellenwert gelegentlich blos als Zahlsymbol verwendet (J. O. Halliwell, Rara Mathematica, London 1869, S. 55 (Kalendertabelle „quantum lucet luna in nocte“)).

4) Über diese italienischen und deutschen Schriftsteller des Quatrocento und beginnenden Cinquecento gibt Auskunft das durch seine bibliographische Exaktheit ausgezeichnete Werk von D. E. Smith (Rara Arithmetica, Cambridge, Mass.-Boston-London 1908, passim).

5) E. Biot, Sur la connaissance que les Chinois ont eu de la valeur de position des chiffres, Journal Asiatique, 1839, S. 497 ff.

6) S. G. Morley, The Correlation of Maya and Christian Chronology, American Journal of Archaeology, 14. Band, S. 204 ff.; F. Cajori,

kehrende Mangel anhaftet, von den maßgebenden deutschen Arbeiten über den gleichen Gegenstand gar keine oder doch viel zu wenig Notiz genommen zu haben. Es soll gerade auch einer der Zwecke der folgenden Darlegung sein, diesem Übelstande wenigstens insoweit abzuhelfen, daß der richtige Sachverhalt klar überblickt werden kann.

Seit geraumer Zeit schon weiß man, daß die Yukateken, ähnlich wie andere mexikanische Stämme, vorab die Azteken und Zapoteken, über eine zielbewußt durchgeführte, mit den himmlischen Erscheinungen wenigstens in gewissem Einklange stehende Zeitrechnung verfügt haben[1]). Noch ist keine volle Klarheit darüber geschaffen worden, wie hoch diese mittelamerikanische Chronologie hinaufreicht; E. Seler, der gründlichste Kenner des gesamten Fragenkomplexes, schreibt ihr ein recht ehrwürdiges Alter (XIII. vorchristliches Jahrhundert) zu, während andere Archäologen dieses Alter weit niedriger einschätzen. Soviel indessen steht fest, daß sie weit über jene Epoche zurückgeht, welche die einheimische Kultur durch eine

---

The Zero and Principle of Local Value used by the Maya of Central America, Science, (2) 44. Band, S. 714 ff. Morleys Note stützt sich auf seine größere Schrift: An Introduction to the Study of the Maya Hieroglyphs, Bulletin of the Bureau of American Ethnology, No. 57 (1915). Die Zitate ermöglichte die gerade noch rechtzeitig vor Torschluß in die Hände seiner europäischen wissenschaftlichen Freunde gelangte Abhandlung Cajoris.

[1]) Bestimmend für die Zitierung der Selerschen Publikationen war dessen Schriftensammlung (Gesammelte Abhandlungen zur Amerikanischen Sprach- und Altertumskunde, 1. Band, Berlin 1902). Im einzelnen kommen die nachstehenden Mitteilungen in Frage: Maya-Handschriften und Maya-Götter, Verhandlungen der Berliner Anthropologischen Gesellschaft, 17. Juli 1886; Über die Namen der in der Dresdener Handschrift abgebildeten Maya-Götter, ebenda, 19. März 1887; Entzifferungen der Maya-Handschriften, ebenda, gleiches Datum; Über die Bedeutung des Zahlzeichens 20 in der Maya-Schrift, ebenda, gleiches Datum; der Charakter der aztekischen und der Maya-Handschriften, Zeitschrift für Ethnologie, 1888, S. 1 ff.; On Maya Chronology, Science, (2) 20. Band, Nr. 496; Die Monumente von Copan und Quirigua und die Altarplatten von Palanque, V. d. B. A. G., 18. November 1899; Einiges mehr über die Monumente von Copan und Quirigua, ebenda, 17. März 1900.

angeblich christliche zu ersetzen trachtete und zum mindesten die erstere vollständig vernichtete. Man besitzt zwei Quellen, aus denen man die Belehrung über die originelle Zeiteinteilung und die mit ihr natürlich in engster Verbindung stehenden Zahlbegriffe der Mayas schöpfen kann, nämlich Handschriften und Inschriften auf gottesdienstlichen Bauten. Als der inhaltreichste Bestandteil der zuerst genannten Klasse erscheint der viel besprochene Dresdener Kodex, durch dessen Studium, das vielfach zu glücklichen Entzifferungen führte, sich E. W. Foerstemann ein unbestrittenes Verdienst erworben hat[1]). Weit zahlreicher sind, wie sich von selbst versteht, die Tempelinschriften, deren die neuere Zeit eine größere Anzahl, teilweise in fast undurchdringlichem Tropendickicht verborgen, ans Licht gefördert hat. Was das bemerkenswerteste ist, dürfte darin bestehen[2]), daß die Schriftsysteme im einen und anderen Falle keineswegs miteinander übereinstimmen; der Codex Dresdensis weist eben echte Schrift auf, während die Skulptur, ebenso wie in Ägypten, den mehr in die Augen fallenden, übrigens auch älteren Hieroglyphen den Vorzug gibt. Geschrieben nahmen sich die neunzehn ersten Ziffern aus, wie folgt[3]):

$$\cdot \cong 1,\ \cdot\cdot \cong 2,\ \therefore \cong 3,\ :: \cong 4,\ - \cong 5,\ \dot{-} \cong 6,\ \ddot{-} \cong 7,\ \overset{\therefore}{-} \cong 8,$$

$$\overset{::}{-} \cong 9,\ = \cong 10,\ \dot{=} \cong 11,\ \ddot{=} \cong 12,\ \overset{\therefore}{=} \cong 13,\ \overset{::}{=} \cong 14,\ \equiv \cong 15,$$

$$\dot{\equiv} \cong 16,\ \ddot{\equiv} \cong 17,\ \overset{\therefore}{\equiv} \cong 18,\ \overset{::}{\equiv} \cong 19.$$

---

1) Foerstemann, Die Dresdener Maya-Handschrift, Leipzig 1883 und Dresden 1892; Erläuterung zur Maya-Handschrift, Dresden 1886.

2) Man darf sich nicht verheblen, daß, wenn eine ferne Zukunft in den Besitz von Manuskripten in deutscher Kursivschrift und lateinischen Inschriften kommen sollte, diese Verschiedenheit manches Kopfzerbrechen bewirken müßte. Um wie viel mehr trifft das für Hieroglyphen und vereinfachte Zeichen zu!

3) Seler, Gesamm. Abhandl., 1. Band, S. 722. „In den Handschriften werden nahezu ausnahmslos die Ziffern durch Kombination von Strichen und Punkten zum Ausdruck gebracht, wobei der Punkt immer eine Einheit, der Strich die Zahl fünf bedeutet. Nur die Ziffer 0 wird durch ein besonderes Zeichen gegeben, durch die in der Regel mit roter Farbe geschriebene Figur eines kleinen Meerschneckengehäuses. Die Einer aber,

*

Man erkennt sofort. daß hier eine durchaus konsequente Bildung der Zahlzeichen gegeben ist, welcher eine Art Fünfersystem zugrunde liegt, während zugleich auch ein Zweiersystem insofern zu seinem Rechte gelangt, als lediglich mit Hilfe zweier Grundzeichen — Punkt und Horizontalstrich — diese merkwürdige Logistik ihr Auskommen findet.

Ein autonomes Zeichen muß freilich, wenn das Positionsprinzip regelrecht durchgeführt werden soll, die Null erhalten, und ein solches ist auch vorhanden. Es entspricht allem Anscheine nach einer Muschel oder einem halb geöffneten Auge. Ebenso hat die Grundzahl zwanzig eine besondere Hieroglyphe erhalten, und zwar ist es eben das Verdienst Selers gewesen, die von Anderen noch nicht erkannte Identifizierung vorgenommen zu haben[1]. Nicht alle verfügbaren Dokumente kennen

die Zwanziger, Dreihundertundsechziger usw., die mit den einzelnen Ziffern zu multiplizieren sind, werden in den Handschriften in der Regel gar nicht bezeichnet." Liest man dies, so kann man in der Tat sein Staunen darüber nicht unterdrücken, daß diese so unzweideutige Erklärung des Charakters yukatekischer Zahlenschreibung, wie sie von unserem ersten Amerikanisten herrührt, drüben über dem Ozean gar nicht recht bekannt geworden zu sein scheint.

[1]) Völlig sicher sind wir hinsichtlich der steinernen Zahlengebilde nach Seler (a. a. O., S. 762 ff.) über die Hieroglyphen für 1, 3, 4, 5, 6, 10, 13, 16 und 18; fast einwandfrei dürfte auch das Bild von 8 sein, weil man von demjenigen für 18 einen Rückschluß zu machen imstande ist. Durch Vergleichung der beiden sehr ähnlichen menschlichen Profile (Totenkopf), welche für 6 und 16 im Gebrauche waren, ließ sich nämlich erkennen, wie jene Addition von 10, die in der Schrift sehr einfach durch zwei Parallelstriche bewerkstelligt ward, vom Bildhauer ersichtlich gemacht worden ist. Dem menschlichen Antlitz wurde ein überschüssiger Unterkieferknochen beigefügt; „das diakritische Zeichen des Knochens erhöht den Zifferwert um zehn" (Seler, a. a. O., S. 765). Bezüglich der Ziffer 9 ließ sich blos eine gewisse Wahrscheinlichkeit, nicht jedoch volle Sicherheit erzielen (a. a. O., S. 774). Die Zusammengehörigkeit dessen, was beide Arten von Schriftvorlagen betreffs der einzelnen Zahlenbilder wahrnehmen lassen, erläutert Seler noch dadurch, daß er (a. a. O., S. 781) „die zwanzig Götter der Dresdener Handschrift" und die den Zahlen 1 bis 10 entsprechenden (hieroglyphischen) „Götterköpfe der Monumente" nebeneinander stellt.

zwar ein und dasselbe Bild für 0, aber auf einfachem rechnerischen Wege ließ sich stets die Zusammengehörigkeit ermitteln.

Es ist *Seler* gelungen, für die meisten Ziffern $\geq 1 \leq 20$ auch die zugehörigen Hieroglyphen ausfindig zu machen, und zwar haben ihm hiefür insbesondere die Denkmäler (Platten, Stelen) von *Copan* und *Palenque* das Material geliefert. Es ergibt sich, daß die Mayas die Mittel besaßen, auch *sehr große Zahlen* durch ihr Zwanzigersystem wiederzugeben, wie solche durch die bei ihnen immer hervortretenden *astronomischen Perioden* unbedingt gefordert wurden. Aus dem Kodex *Foerstemann* läßt sich schließen, daß eine Millionenzahl recht wohl erreichbar war. Es ist nämlich etwa

$$12{,}489{,}781 = 1 + (15 + 13.18) \cdot 20 + 14.18.20^2 + 6.18.20^3 + 4.18.20^4$$

ohne Schwierigkeit dargestellt. Näher auf die arithmetisch-chronologische Seite der Probleme einzugehen, liegt für uns kein zwingender Grund vor, denn unsere Mitteilungen reichen vollständig aus, um den Satz als richtig erkennen zu lassen, *daß das Positionssystem mit Null* an zwei sehr distanten, jedes Verbindungsmittels in geologischer Gegenwart beraubten Erdstellen in vollster gegenseitiger Unabhängigkeit erfunden und beide male zu einem hohen Grade der Ausbildung gebracht worden ist. Einzig und allein auf diesen Erfahrungssatz kam es uns an, um darzutun, daß es, wenigstens auf geistigem Gebiete, unverfängliche Fälle gibt, in denen *der Elementargedanke* oder, wie wir mit einem minder leicht mißzuverstehenden Worte uns ausdrücken möchten, *das ethnologische Autonomieprinzip* seine unbedingte Geltung behauptet.

Auch ist hier, da trotz des übereinstimmenden Grundgedankens das ostindische und westindische System sich in durchaus abweichender Art und Weise auf- und ausgebaut haben, kaum an das zu denken, was neuerdings als *Konvergenzerscheinung* bezeichnet wird und unleugbar eine gewisse Bedeutung beanspruchen darf. An einem spannenden

Einzelbeispiele hat G. Eckstein[1]) gezeigt, daß menschliche Errungenschaften, welche auf den ersten Anblick eine außerordentlich große Ähnlichkeit zu bekunden scheinen, bei tiefer eindringender Betrachtung dann auch wieder allzu erhebliche Verschiedenheiten in sich bergen, um etwa einer direkten Übertragung das Wort reden zu können, während doch auch wieder an eine radikale Ursprünglichkeit des Entstehens eben dieser Leistungen menschlichen Geistes, menschlichen Nachdenkens, menschlicher Handfertigkeit nicht wohl zu denken ist. Gar viele Dinge, welche anfänglich den Eindruck allergrößter Einfachheit hervorzurufen geeignet sind, weisen sich für den ihre Eigentümlichkeiten näher Prüfenden als ziemlich verwickelte Objekte aus. „Eine bisher einfach und einheitlich aufgefaßte Erscheinung des materiellen Kulturbesitzes ist nachweisbar als Konvergenz, d. h. auf mehrere unabhängige, ja weit voneinander liegende Wurzeln zurückgeführt worden.“[2]) Wir geben das ohne weiteres zu, glauben aber für unsere Aufgabe daraus keine Sonderfolgerung herleiten zu sollen.

Denn „Konvergenz“ kann hier doch nur insofern inmitte liegen, als einem Naturgesetze zufolge bestimmte Voraussetzungen unter den denkbarst verschiedenen Zeit- und Ortszuständen zum nämlichen Erfolge führen müssen. Aus welchem Grunde sich die Bewohner Hindostans an das Modell der beiden Hände mit ihren zehn Fingern, diejenigen Mittelamerikas an das beider Hände und Füße mit je zehn Fingern und Zehen gehalten haben — das zu enträtseln wird nach unserem Ermessen dem Forschungsdrange versagt bleiben müssen. Kann man einen richtigen Kausalzusammenhang ausfindig machen zwischen der menschlichen Spontaneität und der uralten Erfahrung, daß mitunter, ja sogar recht häufig, Entdeckungen und Erfindungen von beträchtlicher Tragweite, wie man sagt, „in der Luft liegen“, d. h. nahe gleichzeitig

---

[1]) Eckstein, Zur Herkunft des Pfahlbaues, Erlangen 1916. (Aus dem geographischen Institut der Universität Erlangen.)

[2]) Ebenda, S. 44.

von verschiedenen Persönlichkeiten gemacht wurden, deren eine die andere vielleicht nicht einmal dem Namen nach kannte? Jeder mit der Entwicklungsgeschichte seines Faches vertraute Mathematiker, Physiker, Chemiker, Techniker wird Ereignisse dieser Art namhaft zu machen vermögen.

Die *Ethnologie*, die theoretisch konstruierende Zusammenfassung der von der wesentlich beschreibend vorgehenden *Ethnographie* herangeschafften Tatsachen, hat in den letzten Jahren durch die enge Fühlung, welche sie mit *Psychologie* und *Prähistorie* nahm, beachtenswerte Fortschritte gemacht. Sie wird auch die Befruchtung durch die *Wissenschaftsgeschichte* als förderndes Moment verspüren. Nach dieser Seite hin an einem recht augenfälligen Beispiele den Nutzen solcher Berührung verschiedener Wissenszweige aufzuzeigen, war in erster Linie die Absicht der vorstehenden Zeilen.



Über Valenztätigkeit und Lichtbrechung.

Von **W. Kossel.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 5. Mai 1917.

Es ist anzunehmen[1]), daß in den Wasserstoffverbindungen der Elemente eines Periodenendes jedes Molekül ebensoviel Elektronen enthält wie das Edelgas, das am Periodenende steht. So haben wir in den ersten beiden Perioden:

CH_4	mit	$6 + 4 \times 1 = 10$		SiH_4	mit	$14 + 4 \times 1 = 18$
NH_3	„	$7 + 3 \times 1 = 10$		PH_3	„	$15 + 3 \times 1 = 18$
OH_2	„	$8 + 2 \times 1 = 10$	und	SH_2	„	$16 + 2 \times 1 = 18$
FlH	„	$9 + 1 \times 1 = 10$		ClH	„	$17 + 1 \times 1 = 18$
Ne		$10 \qquad = 10$		Ar	„	$18 + \qquad = 18$

Elektronen. Da wir vermuten, daß das Valenzverhalten dieser Elemente hier überhaupt von dem Bestreben bestimmt wird, die stabilen Systeme der Edelgasatome im Molekül nachzuahmen[2]), und da andrerseits das optische Brechungsvermögen als Funktion von Zahl und Bindung der Elektronen gilt, untersuchen wir, ob die Brechungsindices dieser Verbindungen in einem gesetzmäßigen Zusammenhang stehen. Es liegen folgende Zahlen[3]) vor:

---

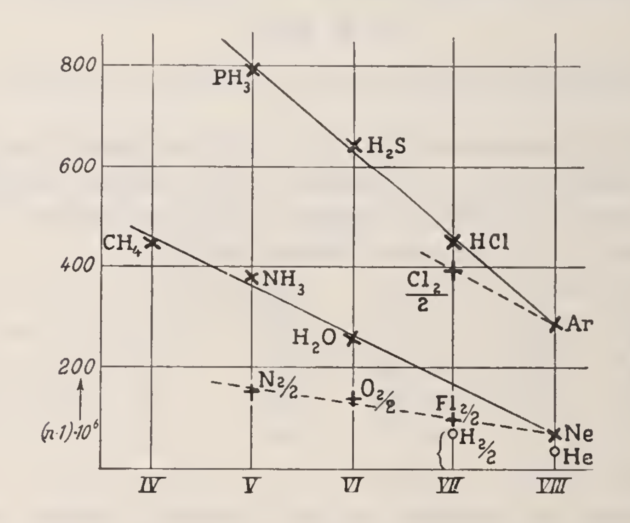
[1]) W. Kossel, Ann. d. Phys. 49, S. 229, 1916.

[2]) L. c. S. 230, 238.

[3]) Außer PH_3 sämtlich aus Loria, Die Lichtbrechung in Gasen und Dämpfen (Braunschweig, Vieweg) entnommen ($\lambda = 546\ \mu\mu$) PH_3 nach Abeggs Handbuch der anorgan. Chemie III, 3 (weißes Licht). Der Einfluß der Dispersion ist für diesen Vergleich völlig zu vernachlässigen.

	$(n-1)\cdot 10^6$		$(n-1)\cdot 10^6$
CH_4	442	SiH_4	—
NH_3	379	PH_3	789
OH_2	253	SH_2	644
FlH	—	ClH	448
Ne	67.15	Ar	282.3

die wir als Funktion der Stellung des schwereren Atoms im System (als Funktion seiner Kernladung) graphisch darstellen:



Man erkennt, daß die betrachtete Funktion einfach linear ist, daß also ein systematischer Zusammenhang besteht, der das Edelgasatom am Periodenende in die Reihe der Wasserstoffverbindungen der vorhergehenden Elemente mit aufnimmt. Die Erwartung, auf die uns die oben erwähnte Valenzauffassung führte, ist bestätigt.

Wir beschränken uns hier ganz auf das tatsächliche Material. Der allgemeine Grundgedanke, daß in diesen Molekülen Elektronenanordnungen gebildet worden sind, die denen der nahestehenden Edelgasatome ähnlich sind, wird durch das angeführte Verhalten wiederum bestärkt, — jede erschöpfende theoretische Behandlung hätte bestimmte genauere Annahmen

hinzuzufügen, wie die Elektronenanordnung beschaffen ist. (Für einen Fall rein binärer Moleküle der zum Teil mit der hier behandelten Reihe zusammenfällt, ist die naheliegendste Annahme l. c. S. 358 diskutiert und schematisch veranschaulicht.)

Wir geben lediglich noch einen Vergleich, der auf das Verhalten derselben Atome in andrer Situation schließen läßt. In der Figur sind noch die Werte (als aufrechte Kreuze) zur Anschauung gebracht, die man erhält, wenn man die Größen $(n-1)$ für die elementaren Gase[1]) durch die Zahl (2) der Atome im Gasmolekül teilt:

	$(n-1)\cdot 10^6$	$\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot 10^6$		$(n-1)\cdot 10^6$	$\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot 10^6$
N_2	299.8	150			
O_2	271	135.5			
Fl_2	195	97.5	Cl_2	784	392
Ne	67.15		Ar	282.3	

Sind die beiden Hälften der homöopolaren binären Moleküle gleich gebaut, so gibt diese Zahl, da $(n-1)$ nach der Theorie jedenfalls der Elektronenzahl proportional sein soll, ein Maß für die Wirkung einer solchen Hälfte, d. h. des elementaren Atoms in der Situation, die es bei der Bildung des elementaren Moleküls einnimmt.

Man erkennt am Fall der ersten Periode (H, He, Kreispunkte), daß auch hier eine einfache Abhängigkeit besteht, die ebenfalls das einzelne Edelgasatom mit einschließt.

Wir haben also auch bei den elementaren Gasen, wenn wir von dem Edelgas aus rückwärts gehen, eine systematische Modifikation von der Edelgasform aus. Diese Modifikation ist indes eine andere, als im Fall der Wasserstoffverbindungen.

---

[1]) Nach Loria, l. c.



Zeitliche und räumliche Verbreitung und Stammesgeschichte der fossilen Fische.

Von **Max Schlosser.**

Vorgelegt von R. v. Hertwig in der Sitzung am 5. Mai 1917.

Die Fische sind zwar an sich als Wasserbewohner für die Überlieferung in fossilem Zustand überaus geeignet, aber gleichwohl weist ihre Geschichte doch manche Lücken auf, wenn auch lange nicht mehr so viele wie zu jener Zeit, als das berühmte grundlegende Agassizsche Werk erschien. Heutzutage würde höchstwahrscheinlich selbst dieser Forscher ernstliche Bedenken tragen, die geologische Verbreitung der Fische als Beweis für die Richtigkeit der Kataklysmentheorie anzuführen, denn inzwischen wurden nicht wenige neue Fundstellen von fossilen Überresten entdeckt, wodurch das Bild von der Verbreitung und dem Erscheinen der verschiedenen Fischtypen beträchtliche Veränderungen erfuhr. Namentlich ergab sich ein viel inniger Zusammenhang zwischen den Formen der Trias, des Jura und der unteren Kreide, sowie zwischen jenen der oberen Kreide und des Tertiärs, als aus den zur Zeit von Agassiz bekannten Fischtypen zu entnehmen war. Wir werden das im folgenden ersehen.

Was den Erhaltungszustand der fossilen Fische anlangt, so finden sich vollständige Skelette oft in großer Menge in tonigen, mergeligen und kalkigen Schiefergesteinen, die als feiner Schlamm in marinen, brackischen oder limnischen Gewässern zum Absatz gelangten. Auch manche feinkörnige Sandsteine schließen viele und wohlerhaltene Fischreste ein,

deren Knochen sich noch in natürlichem Zusammenhang befinden. Dagegen treffen wir in Gesteinen von gröberem Korn sowie in solchen, welche in bewegterem Wasser oder in der Tiefsee abgelagert wurden, nur einzelne Zähne, Schuppen, Hautschilder, Wirbel, Schädel- und Flossenteile und Otolithen. In vielen Schichten fehlen Fischreste fast vollständig, so daß die an fossilen Fischen reichen Ablagerungen oft durch mehr oder weniger sterile voneinander getrennt sind, was sich jedoch meistens aus der verschiedenen Art der Entstehung dieser Sedimente erklären läßt, denn nur bei direkter Aufeinanderfolge von feinkörnigen, der Überlieferung günstigen Schichten können wir auch eine lückenlose Folge der auseinander hervorgegangenen Fischfaunen erwarten, soweit es sich wenigstens um Skelette handelt.

Die ältesten Spuren von Fischen kennt man aus dem *untersilurischen* Kalkstein von Cañon City in Colorado, allein diese Schuppen und Hautplatten lassen sich nicht näher bestimmen, wenn schon ihre Zugehörigkeit zu Placodermen ziemlich wahrscheinlich ist. In Europa erscheinen die ältesten Fische in Schottland im *obersilurischen* Bonebed und im Sandstein von Larnakshire, ferner im dolomitischen Kalk der Insel Oesel und in sandigen Schiefern von Galizien und Podolien, in Nordamerika finden sich Fische im Onodagasandstein von Pennsylvanien. Die bestimmbaren Formen verteilen sich auf Anaspida-Birkeniiden —, Heterostraci — Coelolepiden und Pteraspiden — und Osteostraci — Cephalaspiden und Tremataspiden. Die Elasmobranchier haben einen sicheren Respräsentanten in Onchus.

Im *Devon* entfalten die Fische schon einen ziemlichen Formenreichtum, auch sind sie häufig sehr gut erhalten, namentlich im Oldred Sandstein von Großbritannien und in weichen Gesteinen der russischen Ostseeprovinzen, sowie in manchen Ablagerungen von Nordamerika. Auch in Böhmen, Belgien, Westfalen, Nassau und in der Eifel kommen vereinzelte Fischreste vor, eine größere Ausbeute namentlich von Arthrodira lieferte die Lokalität Wildungen bei Kassel. Noch reicher an solchen

und noch dazu teilweise riesigen Formen — Dinichthys, Megalichthys, Diplognathus — ist das Mittel- und Oberdevon von Ohio, Jowa, Wisconsin und New York.

Die Fischfauna des Devon besteht aus Heterostraci, Gemündeniden, Pteraspiden und Drepanaspiden, — Osteostraci — Cephalaspiden —, Antiarchi — Asterolepiden —, Dipnoern — Dipteriden und Phaneropleuriden —, Arthrodiren — Coccosteiden, Mylostomatiden und Ptyctodontiden — und Crossopterygiern — Holoptychiiden, Rhizodontiden und Osteolepiden. Dazu kommt noch ein bereits sehr hoch entwickelter Typus, nämlich die zu den Palaeonisciden gehörige Gattung Cheirolepis. Die später so formenreichen Elasmobranchier sind nur durch Acanthodier vertreten. Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, daß die schon im Silur existierenden Familien nicht über das Unterdevon hinaufreichen.

Die Fische des *Karbon* stammen teils aus dem marinen Kohlenkalk, teils aus Schiefern und Sandsteinen der produktiven Steinkohlenformation. Von der devonischen Fischfauna unterscheidet sich die karbonische vor allem einerseits durch das Verschwinden der Heterostraci, der Osteostraci, der Antiarchi und der Arthrodiren, andrerseits durch den Reichtum an Elasmobranchiern, von denen freilich fast nur Zähne beziehungsweise Kauplatten und Flossenstacheln vorhanden sind. Die hieher gehörigen Cochliodontiden, Psammotontiden und Petalodontiden sind fast ganz auf das Karbon und zwar auf den marinen Kohlenkalk beschränkt. Das gleiche gilt auch von den Edestiden. Neben ihnen treten auch schon Cestracioniden — Campodus — und Hybodontiden — Orodus und Ctenacanthus — auf. Die Acanthodier dauern noch fort, die Pleuracanthiden und Cladodontiden beginnen. Neben den Elasmobranchiern spielen die Crossopterygier — Rhizodontiden — eine nicht ganz unwichtige Rolle, auch treten schon Coelacanthiden auf. Die etwas rätselhaften Ctenodontiden haben ebenfalls Repräsentanten aufzuweisen und die heterozerken Ganoiden — Palaeonisciden und

Platysomiden sind schon durch eine nicht ganz unbeträchtliche Anzahl von Gattungen vertreten und zwar stammen sie fast ausschließlich aus Ablagerungen der produktiven Kohlenformation, was übrigens auch für die Crossopterygier gilt.

Die Fische des *Perm* schließen sich enger an jene des Karbon an. Sie finden sich im Rotliegenden des Saarbeckens, in Böhmen, Sachsen, Schlesien und Frankreich, sowie im Magnesian Limestone von England. Reich an Individuen ist auch der Kupferschiefer von Hessen und Thüringen. Auch das Perm von Texas und Neumexiko hat einige fossile Formen geliefert. Weitaus am zahlreichsten, namentlich an Individuen sind die Heterocerken — Palaeonisciden und Platysomiden, daneben kommen auch ein Paar Crossopterygier — je ein Coelacanthide und ein Ctenodontide vor. Im Vergleich zur karbonischen Fischfauna ist die permische arm an Elasmobrachiern, denn man kennt von Hybodontiden, Cochliodontiden und Petalodontiden nur je eine Gattung, Wodnika, bzw. Menaspis und Janassa. Von den rätselhaften Edestiden hat sich noch ein Vertreter — Helicoprion — erhalten. Um so häufiger sind dafür die Pleuracanthiden und Acanthodiden, die hier den Höhepunkt ihrer Entwicklung erreichen und am Ende des Perm vollständig erlöschen.

Die schroffe Unterbrechung der Entwicklung, welche sich bei den meisten Abteilungen des Tier- und Pflanzenreiches am Schluß des paläozoischen Zeitalters geltend macht und offenbar auf den gewaltigen Veränderungen beruht, welche damals sowohl in der Verteilung von Wasser und Land als auch in den klimatischen Verhältnissen stattfanden, finden wir auch beim Vergleich der permischen Fischfauna mit jener der Trias. Die ältesten Ablagerungen der *Trias*, der Buntsandstein, ist als mehr oder weniger terrestrische Bildung so gut wie völlig steril an Fischen, erst mit der Bildung des marinen Muschelkalks begannen auch wieder günstigere Verhältnisse für die Überlieferung von fossilen Fischresten. Der Unterschied zwischen der paläozoischen und der triadischen Fischfauna äußert sich in erster Linie in dem Fehlen der zahlreichen stark speziali-

sierten Elasmobranchier, welche natürlich am wenigsten geeignet waren, sich neuen Verhältnissen anzupassen. Nur Vertreter der Hybodontiden scheinen jene tiefgreifenden Änderungen des Klimas und der Erdoberfläche überdauert zu haben. Sie spielen als Hybodus und Acrodus im Muschelkalk und Keuper eine nicht unwichtige Rolle und sind vielleicht der Ausgangspunkt aller späteren Elasmobranchier, was sich aber wohl nie wird entscheiden lassen, da leider in der Trias stets nur isolierte Zähne und Flossenstacheln vorkommen. Von Dipnoern finden wir in der Trias die Gattungen Ceratodus, von Crossopterygiern die Gattungen Coelacanthus und Graphiurus. Man kennt allerdings nur äußerst wenige Skelette dieser Fische, dafür sind aber wenigstens die als Ceratodus beschriebenen Zähne in der Lettenkohle keineswegs selten.

Weitaus die Mehrzahl aller aus der *Trias* beschriebenen Fische gehören zu den durch ihre glänzenden massiven Schmelzschuppen ausgezeichneten Ganoiden. Sie verteilen sich auf die Familien der Pycnodontiden, Palaeonisciden, Catopteriden, Stylodontiden, Sphaerodontiden, Pholidophoriden und Caturiden, neben welchen die langgestreckten und scheinbar schuppenlosen oder doch nur teilweise beschuppten Belonorhynchiden wegen der relativen Häufigkeit ihrer sehr charakteristischen Zähne — Saurichthys — besonderes Interesse verdienen. Der Zusammenhang mit den permischen Ganoiden ist ein ziemlich inniger, denn einige dieser Familien reichen so gut wie unverändert aus dem Paläozoikum in die Trias herauf — Palaeonisciden, Catopteriden — und die übrigen lassen sich ziemlich ungezwungen teils von diesen, teils — Pycnodontiden — von den ebenfalls permischen Platysomiden ableiten. Dagegen ist die Herkunft der Belonorhynchiden vorläufig noch nicht zu ermitteln. Die Hauptfundplätze von triadischen Fischen, wenigstens von Habitusexemplaren, sind der schwarze plattige Muschelkalk von Perledo am Comersee und ähnliche etwas jüngere Schiefer von Raibl in Kärnten, die Asphaltschiefer von Seefeld und anderen Orten in den bayrisch-tiroler Alpen und der obere Hauptdolomit von

Adnet bei Salzburg. Auch der Keupersandstein von Schwaben, Thüringen und Franken, sowie die Sandsteine der Karrooformation in Südafrika, die Hawkesburyschichten von Neu Südwales und die schwarzen Schiefer von Connecticut schließen wohlerhaltene Skelette von Fischen ein.

Die Fischfauna des *Lias* oder schwarzen Juras bildet die direkte Fortsetzung und Weiterentwickelung der triadischen. Von den zahlreichen durch Agassiz und Egerton beschriebenen Arten stammt etwa die Hälfte aus dem unteren Lias von Lyme Regis in Dorset, der mittlere Lias ist, weil eine Ablagerung in größerer Meerestiefe arm an Fischen, dafür lieferten die Posidonomyenschiefer und Stinkkalke des oberen Lias in Franken und vor allem in Württemberg, sowie gleichaltrige Schichten von Werther bei Halle, in England und in den französischen Departementen Calvados, Yonne und Côte d'Or wieder eine stattliche Anzahl von Arten.

Die schon in der Trias sehr häufigen Hybodontiden sind auch im Lias nicht selten und sogar manchmal als vollständige Habitusexemplare überliefert. Zu ihnen gesellt sich jetzt ein neuer Typus der Elasmobranchier. der älteste Lamnide, von dem man freilich nur die spitzen schlanken, früher Sphenodus, jetzt Orthacodus genannten Zähne kennt, und, was fast noch wichtiger ist, die ersten sicheren Repräsentanten der Holocephalen. Die Coelacanthinen sind im Lias mindestens eben so selten wie in der Trias, und Ceratodus scheint bisher überhaupt noch nicht beobachtet worden zu sein. Belonorhynchiden kennt man aus dem Lias von England und Württemberg. Bemerkenswert erscheint die Anwesenheit eines Chondrostiers. Die Hauptmasse der liasischen Fische gehört zu den Stylodontiden. Sphaerodontiden und Pholidophoriden, die Pycnodontiden haben einen Vertreter in der Gattung Mesodon, die auch schon in der oberen Trias vorkommt. Die Amioidei weisen in den Pachycormiden stattliche Vertreter auf und die bereits in der oberen Trias auftretenden Caturiden entfalten jetzt einen ziemlichen Formenreichtum. Als das wichtigste Ereignis für die allmäh-

lich beginnende Modernisierung der Fischfauna erscheint jedoch das erstmalige Auftreten eines Teleostiers — der Leptolepis ähnlichen Gattung Lycoptera. —

Der *Dogger* oder braune Jura war wegen seiner oolithischen und daher wohl in stark bewegtem Wasser abgelagerten Gesteinsschichten der Überlieferung von fossilen Fischen wenig günstig. Unsere Kenntnis der damaligen Fischfauna gründet sich daher nur auf isolierte Zähne, Flossenstacheln, Schuppen und Knochen. Die im Dogger nachweisbaren Gattungen sind entweder solche, die wir bereits im Lias gefunden haben, oder sie begegnen uns wieder im weißen Jura oder *Malm*. Hier treffen wir nun außerordentliche günstige Erhaltungsbedingungen in den plattigen Kalkschiefern von Solnhofen, Eichstätt und Kelheim in Bayern und in gleichzeitigen, sehr ähnlichen Ablagerungen von Nusplingen in Württemberg und von Cerin im Departement Ain. Eine Fülle von prachtvoll erhaltenen Elasmobranchiern, Ganoiden und einigen Teleostiern stammen von diesen Fundorten. Im Korallenkalk von Kelheim und Schnaitheim, im Kimmeridge und Portlandkalk von Solothurn, Neufchatel, Hannover und Boulogne sur mer und in den Purbeckschichten von England sind uns trefflich erhaltene Gebisse und Zähne, Stacheln und Schuppen überliefert worden, in den genannten Ablagerungen von Hannover und England auch einige mehr oder weniger vollständige Skelette. Was die Zusammensetzung dieser Fauna betrifft, so zeichnet sie sich vor allem durch den großen Formenreichtum an Elasmobranchiern aus. Von mehreren Typen der Haie und Rochen kennt man vollständige Skelette. Zu den bisher vorhandenen Lamniden und Hybodontiden gesellen sich jetzt auch sichere Repräsentanten der Notidaniden, Scylliden und Cestracioniden, sowie der Squatiniden und Rhinorajiden, und die Hybodontiden selbst bereichern sich um einen neuen Typus, Asteracanthus, der allerdings schon im Dogger angedeutet ist, was auch für die Notidaniden gilt. Die Holocephalen sind hier viel vollständiger erhalten und auch häufiger als in jeder anderen Ablagerung, dagegen sind die primi-

tiven heterocerken Ganoiden, die Palaeonisciden bis auf eine einzige Gattung Coccolepis erloschen. Unter den Crossopterygiern erreichen die Coelacanthinen in Bezug auf Mannigfaltigkeit den Höhepunkt ihrer Entwickelung. Die wichtigste Rolle unter den jurassischen Fischen spielen jedoch die Pycnodontiden, Sphaerodontiden, Macrosemiiden, Pholidophoriden, Aspidorhynchiden, Pachycormiden, Caturiden und Leptolepiden. Die Oligopleuriden und Megaluriden treten im oberen Jura zum erstenmale auf.

Die Fischfauna des *Wealden* enthält sowohl in Belgien als auch in England und Hannover nur solche Familien und Gattungen, welche uns auch im oberen Jura begegnen und bedarf daher keiner eingehenderen Besprechung. Es soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, daß unter den Pycnodonten bereits ein etwas vorgeschrittener Typus — Coelodus — erscheint. Im ganzen ist die Fauna des Wealden arm an Formen.

In der *Kreidezeit* macht sich eine entschiedene Umgestaltung der Fischfauna insoferne geltend, als die bisher vorherrschenden Ganoiden immer mehr von Teleostiern verdrängt werden. Dieser Wechsel ist in der mittleren und oberen Kreide fast vollständig beendet, dagegen haben sich in der unteren noch ziemlich viele Ganoidtypen aus der Jurazeit erhalten. Dadurch zerfällt die Fischfauna der Kreide in zwei scheinbar scharf geschiedene Abteilungen, von denen zur älteren die Fische aus den schiefrigen Kalkablagerungen von Pietraroja, Castellamare und Torre d'Orlando im Neapolitanischen, von Comen in Istrien, Crespano in Venetien, von der Insel Lesina, aus den schwarzen pyritischen Kalken von Grodischt in den Karpathen, aus den Neokomschiefern von Voirons bei Genf und aus ähnlichen plattigen Kalken in Mexiko gehören. Im ganzen ist die Fischfauna der unteren Kreide nicht sehr formenreich, so daß wir wohl nicht im Stande sind, uns ein vollständiges Bild von ihrer wirklichen Zusammensetzung zu machen, denn nur in Voirons, Lesina und in Comen findet sich eine größere Anzahl von Formen, die meisten Lokalitäten liefern nur einige wenige Gattungen und Arten, unter welchen Pyc-

nodontiden, Aspidorhynchiden und Leptolepiden vorherrschen, während Oligopleuriden, Macrosemiiden und Megaluriden, sowie Lamniden stets weit seltener sind.

Das Vorkommen von Clupeiden, Chirocentriden, Elopiden, Enchodontiden und sogar von Carangiden — Aipichthys — zeigt uns jedoch, daß die Teleostier damals schon ziemlich weit differenziert waren. Wir kennen Fische eigentlich fast nur aus anormalen Ablagerungen der damaligen Zeit, die typischen Neokomschichten sind vorwiegend Absätze in tieferem oder in bewegterem Wasser, und waren daher der Überlieferung von Fischen wenig günstig, was sich schon in der Seltenheit von Elasmobranchiern äußert, von welchen nur Notidanus, Orthacodus und Asteracanthus etwas häufiger auftreten.

Einen auffallenden Gegensatz hiezu bilden die Ablagerungen der *oberen Kreide*, die sich schon vom Cenoman an gerade durch die Häufigkeit von Elasmobranchier-Zähnen auszeichnen und hierin lediglich von einigen Tertiärablagerungen übertroffen werden. Die Elasmobranchier der jüngeren Kreide verteilen sich hauptsächlich auf Ptychodontiden und Lamniden. Die ersteren reichen nicht mehr in das Tertiär hinauf, dagegen sind die Lamniden schon durch eine Anzahl noch lebender Gattungen vertreten. Neben diesen beiden Familien enthalten die jüngeren Kreideschichten auch Spinaciden und Scylliden, seltener sind Notidaniden und Cestracioniden, letztere nur durch die Hybodus ähnlichen Zähne von Synechodus repräsentiert. Von Squatiniden kennt man ganze Individuen vom Libanon und aus Westfalen, die erstere Lokalität hat außerdem auch Pristiden und Rhinorajiden geliefert. Holocephalen kommen stets nur als Seltenheiten vor. Bemerkenswert erscheint dagegen die Häufigkeit von Kauplatten eines Dipnoers — Ceratodus — im Cenoman von Baharieh in der lybischen Wüste, mit denen auch die als Gigantichthys beschriebenen Pristiden-Zähne vergesellschaftet sind.

Die Coelacanthiden sind in der oberen Kreide durch die Gattung Macropoma vertreten, von der man außer Habitus-

exemplaren auch die Koprolithen kennt. Unter den Ganoiden herrschen die Pycnodontiden bei weitem vor, Zähne von Coelodus und Pycnodus fehlen wohl in keiner Ablagerung der oberen Kreide. Dagegen gehören die Schuppen eines großen Lepidotus zu den Seltenheiten. Die Macrosemiiden haben in Petalopteryx, die Oligopleuriden in Spathiurus und die Aspidorhynchiden in Belonostomus noch sichere Vertreter aufzuweisen. Die Megaluriden sind durch die noch lebende Gattung Amia repräsentiert. Ziemlich häufig finden sich endlich in der Kreide von England und Kansas Zähne, Schädelknochen, sowie die riesigen Flossen von Protosphyraena, während sicher dazu gehörige Wirbel bis jetzt nicht bekannt sind. Es erscheint daher die Vermutung, daß diese Gattung von den gleichfalls praktisch wirbellosen Pachycormiden des Jura abstamme, sehr wohl begründet. Die überwiegende Mehrzahl der jüngeren Kreidefische gehört jedoch zu den Teleostiern und unter ihnen spielen wieder die Clupeiden, Albuliden, Chirocentriden, Elopiden, Dercetiden, Enchodontiden, Saurodontiden, Ichthyodectiden, Scopeliden, Beryciden und Chirotrichiden die wichtigste Rolle, von denen aber nur die Albuliden, Dercetiden, Scopeliden und Beryciden wirklich neue Elemente der Fauna darstellen, während die übrigen sowie die Ctenothrissiden schon in der älteren Kreidezeit gelebt haben oder sich doch ungezwungen von Formen der älteren Kreide ableiten lassen. Bemerkenswert erscheint die hochgradige Spezialisierung der auf die Kreide beschränkten Dercetiden, Plethodiden, Enchodontiden und Ichthyodectiden im Gegensatz zu dem konservativen Verhalten der noch jetzt lebenden Clupeiden. Nicht unwichtig ist auch das freilich nur seltene Auftreten von Carangiden — Bathysoma —, Muraeniden, sowie von Perciden, Cottiden und Gobiiden. Die heutzutage die Tiefsee bewohnenden Halosauriden sind wenigstens durch Echidnocephalus und Enchelurus angedeutet. Der Vollständigkeit halber seien hier noch die auf die obere Kreide beschränkten Tomognathiden erwähnt, sowie

das erstmalige Auftreten der durch Otolithen nachweisbaren Macruriden und von freilich etwas zweifelhaften Stromateiden — z. B. Platycormus.

Als die wichtigsten Fundstätten von Fischen der jüngeren Kreide kommen in Betracht die kalkigen Mergel von Kansas, die sich vor allen anderen bekannten Ablagerungen durch den Reichtum an riesigen Teleostierskeletten — Ichthyodetiden — und von Protosphyraena auszeichnen, die Kalkschiefer vom Libanon, die mergeligen Sandsteine der Baumberge in Westfalen, die weiße Kreide von England und Schweden und das Senon der Nordalpen. Auch Brasilien und Persien haben vor kurzem unsere Kenntnis der oberkretazischen Fischfauna durch manche Beiträge erweitert. Dagegen haben die Funde in der lybischen Wüste fast nur die größere Verbreitung einer Anzahl schon bisher bekannter Formen erwiesen.

Mit Beginn der *Tertiärzeit* tritt die Annäherung an die gegenwärtigen Verhältnisse immer deutlicher hervor. Die älteste Fischfauna des *Eocaen* ist die aus dem Londonton. Soweit es sich bei ihr um Funde aus England selbst handelt, bedarf sie freilich noch einer genaueren Beschreibung, um so besser kennt man jetzt dafür die Fischreste aus gleichaltrigen und etwas jüngeren Ablagerungen in Frankreich, Belgien und Ägypten. Leider bestehen die Funde fast nur aus isolierten Zähnen, Kauplatten, Wirbeln, Schädelknochen und Otolithen, aber trotzdem ist es geglückt, die Anwesenheit einer stattlichen Anzahl von Elasmobranchier- und Teleostier-Gattungen festzustellen. Was die ersteren betrifft, so schließen sich die Lamniden, Notidaniden, Scylliden und Cestracioniden — Synechodus — aufs engste an die Arten der oberen Kreide an. Das gleiche gilt auch von den stets ziemlich seltenen Holocephalen — Chimaeriden. — Die Pristiden werden relativ häufig, als ein neues Element der Fischfauna erscheinen die Myliobatinen. Nach Smith Woodward soll sich diese Abteilung der Rochen aus den Ptychodontinen der oberen Kreide entwickelt haben, was aber bei der gewaltigen Verschiedenheit dieser Gebisse und der hochgradigen

Spezialisierung der Zähne von Ptychodus nicht wohl möglich ist. Die Teleostier haben jetzt viele neue Typen aufzuweisen, namentlich Gadiden, Siluriden, Labriden, Trachiniden, Spariden, Scombriden, Xiphiiden, Gymnodontiden und Sclerodermi. Die Ichthyodectiden und Protosphyraeniden sind vollständig verschwunden, dagegen hat sich noch ein Pycnodontide — Pycnodus — erhalten und die Gattungen Amia und Lepidosteus sind geradezu charakteristisch für Eocaenschichten und zwar sowohl in Europa als auch in Nordamerika. Im Londonton fanden sich Reste von Accipenser, in Ägypten solche von Polypterus. Während die bisher erwähnten Formen nur durch isolierte Zähne, Wirbel und andere Skelettreste, zum Teil auch nur durch Otolithen nachzuweisen waren, kennt man aus dem plattigen Kalk von Monte Bolca bei Verona eine Menge guter Habitusexemplare, die unsere Kenntnis der eocaenen Fischfauna in der glücklichsten Weise ergänzen. Reste von Selachiern gehören hier freilich zu den Seltenheiten, wenn auch Scylliden und Carchariiden nicht vollständig fehlen und die Rochen sogar verhältnismäßig ziemlich formenreich sind. Die Ganoiden haben hier ihre letzten Vertreter in Pycnodontiden. Unter den Teleostiern herrschen die Acanthopterygier entschieden vor, besonders häufig sind Beryciden, Spariden, Serraniden, Chaetodontiden, Perciden und Carangiden. Diese letztgenannte Familie hat schon hochspezialisierte Formen, wie Semiophorus und Mene aufzuweisen. Hochspezialisiert sind auch die hier vorkommenden Blenniiden, Blochiiden, Sclerodermi, Gymnodontiden und Pleuronectiden. Als sonstige Bestandteile dieser Fischfauna verdienen auch Clupeiden, Muraeniden, Sphyraeniden und Lophobranchier Erwähnung. Die Verwandten dieser Fische von Monte Bolca leben heutzutage im indisch pazifischen und im tropischen atlantischen Ozean, im roten Meer, und nur zum kleineren Teil auch im Mittelmeer. Die Herkunft dieser reichen Eocaenfauna ist freilich in der Hauptsache noch in Dunkel gehüllt. Eine Anzahl Formen dürfte wohl aus solchen der Kreide vom

Libanon abzuleiten sein, die große Mehrzahl aber muß aus einem uns bis jetzt nicht bekannten, wahrscheinlich jedoch südlichen oder südöstlichen Gebiete eingewandert sein.

An der oberen Grenze des Eocaens liefern die schwarzen Dachschiefer von Matt in Glarus, die Menilitschiefer in den Karpathen und die etwas jüngeren Amphysile- oder Melettaschichten im Mainzer Becken, in Oberelsaß, am Nordrand der bayerischen Alpen — Siegsdorf — und in Steiermark eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Gattungen und Arten, unter denen sich auch Tiefseeformen — Lepidopus befinden. Aus Glarus, der reichsten Fundstelle dieser Zone sind nach Wettstein 29 Arten von Teleostiern bekannt. Außer dem schon genannten Lepidopus kommen als wichtigste Bestandteile dieser Fauna Clupeiden, darunter die durch ungemein charakteristische Schuppen ausgezeichnete Gattung Meletta, ferner Albuliden, Gadiden, Zëiden, Scopeliden, Centrisciden, Perciden, Sclerodermi, Scombriden, Trichiuriden und Palaeorhynchiden in Betracht. Im Vergleich zu der von Monte Bolca ist diese Fischfauna ziemlich arm, doch scheinen in manchen Fällen genetische Beziehungen nicht gänzlich ausgeschlossen zu sein, wenn auch einige andere Formen, wie die Trichiuriden, eher auf Verbindung mit dem französich-belgischen Eocaenmeere hinweisen. Noch enger schließt sich an die Fischfauna vom Monte Bolca jene aus den plattigen Kalken von Chiavon im Vicentin an, denn sie enthält auch Sphyraeniden, Carangiden, Spariden, Gobiiden, Labriden und Cottiden.

Das eigentliche, typisch ausgebildete *Oligocaen*, der Rupelton von Belgien und die Meeressande des Mainzer und Pariser Becken, enthält ziemlich viele Fischreste, allein es sind nur isolierte Zähne, Hautplatten und Flossenstacheln von Haien und Rochen, sowie Wirbel, Kopfknochen und namentlich Otolithen von Teleostiern. Sie verteilen sich fast ausnahmslos auf Gattungen, welche uns schon im Eocaen von Belgien und Nordfrankreich und zwar in ganz ähnlicher Erhaltung begegnet sind, aber es fehlen einige Gattungen, wie Ginglymostoma

und Diodon und die Xiphiiden werden entschieden seltener, wie überhaupt diese jüngere Fauna doch schon einen ziemlich ärmlichen Eindruck macht gegenüber der eocaenen.

In den westlichen Staaten Nordamerikas, in den Puerco-, Wasatsch- und Bridger-Schichten von Neu Mexiko und Wyoming kommen fossile Fische ziemlich häufig vor, ja eine Ablagerung, das Green Riverbed, ist geradezu charakterisiert durch die Häufigkeit prachtvoll erhaltener Fischskelette. Die Beziehungen zu den Fischen des europäischen Eocaen sind freilich sehr gering, denn es handelt sich hier um Süßwasserbildungen, während die gleichzeitigen Ablagerungen Europas marinen Ursprungs sind. Gleichwohl kommen auch in Green River bed Clupeiden — Diplomystus —, Pomacentriden — Priscacara — und sogar ein Roche — Xiphotrigon — vor, was wenigstens auf eine zeitweilige Verbindung dieses Süßwassers mit dem Meere, etwa durch einen großen Fluß schließen läßt. Die außerdem dort nachgewiesenen Gattungen verteilen sich auf Osteoglossiden, Aphredoderiden und Cypriniden. Im übrigen Süßwassereocaen der westlichen Staaten Nordamerikas finden sich nur Siluriden, Lepidosteiden und Amiiden — Amia und Pappichthys, — die auch in manchen Süßwasserablagerungen des europäischen Eocaen vorkommen.

Gut erhaltene Skelette von Amia — Notaeus — und Lepidosteus liefert der eocaene Schieferton von Messel bei Darmstadt, solche von Amia — Cyclurus — der oligocaene Süßwasserkalk von Armissan in der Provence. In Nordamerika kennt man fossile Reste dieser Gattung auch aus den miocaenen Süßwasserschichten von Florissant in Colorado, welche sich durch den Reichtum von wohlerhaltenen Insekten auszeichnen, von Fischen aber außer Amia nur Aphredoderiden — Trichophanes, — Cypriniden — Amyzon — und Siluriden enthalten.

Im europäischen *Untermiocaen* sind Fischreste nur an zwei Fundorten in größerer Anzahl nachgewiesen, nämlich in den Braunkohlen von Rott bei Bonn, wo neben der auch aus den oligocaenen Süßwasserschichten von Aix in der Provence bekannten Gattung Smerdis, Cypriniden vorkommen und in

Nordböhmen, wo neben Esox und Lebias auch Cypriniden, Salmoniden, Perciden, Cottiden und sogar noch Lepidosteus und Amia zum Vorschein gekommen sind.

Um so häufiger sind dagegen Fischreste in der weitverbreiteten miocaenen Meeremolasse, aber sie verteilen sich fast ausschließlich auf Selachier, namentlich Notidaniden, Carchariiden, Lamniden und Rhinorajiden — Trigoninae und Myliobatinae, — die aber in engster verwandtschaftlicher Beziehung zu den eocaenen und oligocaenen Arten und Gattungen stehen. Teleostier sind sehr spärlich und nur durch isolierte Wirbel, Zähne, Knochen und Otolithen vertreten. Mit wenigen Ausnahmen lassen sich diese Reste auf noch lebende Gattungen beziehen. Auch die brakischen Tone von Unterkirchberg bei Ulm, die Süßwasserkalke von Oeningen und Steinheim, die sarmatischen Schichten von Radoboj u. a. O. in Kroatien, die Cerithienschichten im Wiener Becken beweisen, daß zur Zeit ihrer Entstehung die Fischfauna der süßen und brakischen Gewässer in Mitteleuropa nicht sehr erheblich von der jetzt in Südeuropa und Kleinasien lebenden abwich. Nicht uninteressant ist das Vorkommen von Solea und Clupea in Unterkirchberg bei Ulm neben Cyprinus, Smerdis und anderen Süßwasserfischen.

Eine Vermischung von marinen Fischen mit Süßwasserformen zeigt auch die überaus reiche obermiocaene Fauna von Licata in Sizilien, welche sich teilweise auch bei Girgenti in den Gipsmergeln von Sinigaglia, bei Gabbro in Toscana, Lorca in Spanien und in Oran wieder findet. Im ganzen beschreibt Sauvage von Licata 52 Arten, darunter 44 marine Formen. Der Charakter dieser Fischfauna ist ein entschieden mediteraner, die Arten sind allerdings sämtlich ausgestorben.

Zwischen *Pliocaen* und *Jetztzeit* besteht, soweit die Fische in Betracht kommen, kaum mehr ein nennenswerter Unterschied. Freilich kennen wir auch nur wenige Fischreste aus der jüngsten Stufe des Tertiärs.

Aus der zeitlichen Verbreitung der Fische ergeben sich mancherlei Anhaltspunkte für die Stammesgeschichte dieser

Klasse. Im palaeozoischen Zeitalter waren — abgesehen von den Placodermen und Arthrodiren — lediglich Elasmobranchier, Dipnoer und Ganoiden vorhanden, und zwar treten Elasmobranchier und Ganoiden fast gleichzeitig auf, so daß, wenn sie überhaupt auf eine Urform zurück geführt werden dürfen, diese Trennung schon sehr frühzeitig erfolgt sein müßte. Durch die Funde der Anaspiden und der Coelolepiden im Obersilur scheint diese Annahme auch gerechtfertigt zu sein, denn man ist stark versucht, in den ersteren Vorläufer der beschuppten Dipnoern und Ganoiden, in den letzteren, mit zähnchenähnlichen Hautgebilden versehenen Formen hingegen die Vorläufer von Elasmobranchiern zu erblicken. Die Trennung in jene drei Hauptgruppen müßte also schon im älteren Silur oder im Cambrium erfolgt sein. Die übrigen Placodermen, also alle mit großen einfachen oder komplizierten Hautschildern versehenen Formen scheiden als Ahnen von später auftretenden Fischtypen ohne weiteres aus, dagegen ist es sehr wohl möglich, daß sie als Vorläufer der Amphibien, als persistierende, freilich mißglückte, weil zu stark spezialisierte Larvenstadien derselben zu betrachten sind. Erst die Arthrodiren waren an sich vielleicht weiterer Entwicklung in der Richtung gegen die Amphibien fähig, aber auch hier wären die Riesenformen, wie Dinichthys, als wirkliche Vorläufer von Amphibien ausgeschlossen. Es ist jedoch wahrscheinlicher, daß alle uns überlieferten bepanzerten Placodermen sowie die Arthrodiren nur erloschene Seitenzweige darstellen, die wirklichen Ahnen der Amphibien haben wir uns eher als schwach bepanzerte oder völlig nackte, peristierende Kaulquappen vorzustellen, welche daher auch kaum fossilisationsfähig waren.

Was die Elasmobranchier betrifft, so ist zwar bereits etwa vom Ende der Trias an ein ziemlich inniger Zusammenhang zwischen den damaligen Selachiern und den noch lebenden Haien und Rochen festzustellen und von der mittleren Kreide an lassen sich sogar für eine Anzahl Gattungen gut geschlossene Stammesreihen konstruieren, dagegen ist es überaus

zweifelhaft, ob die Ichthyotomi, Acanthodi und die Petalodontiden stammesgeschichtliche Bedeutung haben, — für die Edestiden und Cochliodontiden ist das ohnehin ausgeschlossen — und selbst die Hybodontiden dürften trotz ihrer engen Beziehungen zu den Cestracioniden, welche sich bis in die Gegenwart erhalten haben, wohl eher nur eine erloschene Seitenlinie darstellen.

Wie mit den Selachiern verhält es sich auch mit den Holocephalen. Auch sie treten zuerst im Jura auf und erhalten sich so gut wie unverändert bis in die Gegenwart. Ob sie als Nachkommen der Ptyctodontiden betrachtet werden dürfen, erscheint mehr als zweifelhaft.

Sehr früh begegnen uns die ersten Dipnoer. Haben schon die noch jetzt lebenden Formen seit langem als nahe Verwandte der Amphibien gegolten, so ergeben sich aus der Untersuchung des fossilen Materials noch weitere verwandtschaftliche Beziehungen der Dipnoer, denn sie stehen auch den Arthrodiren und den Crossopterygiern sehr nahe und durch ihre Verwandtschaft mit den ersteren wird abermals ihre Verwandtschaft mit den Amphibien indirekt bestätigt. Alle übrigen Fische — die Teleostomi — bilden einen gesonderten Stamm, der schon im Devon mit einem Palaeonisciden — Cheirolepis beginnt und sich bis in die Trias ziemlich wenig verändert. Neben ihnen erscheinen aber bald platt gedrückte Formen, die Platysomiden, aus denen im Jura die Pycnodontiden hervorgehen. Die weit überwiegende Mehrzahl aller jurassischen Fische einschließlich der ersten Teleostier wurzelt in den wenig spezialisierten Palaeonisciden und ebenso kommt auch wieder dem ältesten Teleostier, — Lycoptera — eine ungemein hohe Bedeutung für die meisten, wenn auch schwerlich für alle Teleostier zu. Erst in der unteren und noch mehr in der oberen Kreide erscheinen so hochgradig diffenzierte Formen, daß ihre Ableitung von Leptolepiden wohl unmöglich ist. Sie dürften eher, wie das S. Woodward z. B. für die Muraeniden vermutet, zum Teil mit Macrosemiiden, zum Teil vielleicht auch mit Amioideen in Verbindung zu bringen sein.

Wenn auch bereits in der Trias vereinzelte aberrante Typen, wie die Belonorhynchiden und Pycnodontiden, und später die Aspidorhynchiden existiert haben, so verschwinden sie doch gegenüber der Unmenge von abenteuerlichen Formen, welche jetzt die Meere bevölkern und uns namentlich durch die Tiefseeforschung bekannt geworden sind. Vor dem Tertiär, wo zum erstenmale Tiefseefische — Lepidopus — auftreten, kennt man keine Bewohner von größerer Meerestiefe. Es gibt zwar schon in der Kreide Vertreter der Scopeliden, Elopiden und Halosauriden, welche heutzutage in bedeutenderen Tiefen leben, auch Isteus und Tomognathus bringt Smith Woodward in Beziehung zu Tiefseeformen, sie sind jedoch stets mit entschiedenen Seichtwasserbewohnern vergesellschaftet. Auch war ihre Organisation dem Tiefseeleben noch nicht angepaßt, wie ihre massive Knochenstruktur und die starke Verkalkung der Skelette zeigt. Selbst der erwähnte Lepidopus findet sich noch mit Typen zusammen, welche keineswegs für besonders große Meerestiefen sprechen.

Unsere heutigen Süßwasserfische sind wohl sämtlich Nachkommen von marinen Formen. Direkt beobachten können wir dies bei den Dipnoern und den Amioideen. Ihre ältesten bekannten Überreste finden sich immer nur in Meeresablagerungen, erst spät, die Amioideen erst im Eocaen, sind sie in das Süßwasser gewandert. Auch unter den Elasmobranchiern gibt es Formen, — Ichthyotomi, — welche einen derartigen Wohnungswechsel vorgenommen haben.

Unsere Ausführungen dürften, und das war auch ihr Zweck, denn doch den Nachweis erbracht haben, daß die Stammesgeschichte wenigstens die Überlieferung der Fische keineswegs so lückenhaft ist, wie das so häufig angegeben wird, ohne daß sich jedoch die Verbreiter dieses Mythus die Mühe nähmen, den Tatbestand auch wirklich zu prüfen. Obschon also das Material der fossilen Fische viel zahlreicher ist und sich auch zeitlich viel inniger aneinander fügt, als man gewöhnlich annimmt, so wird es doch schwerlich außer in einigen Ausnahmsfällen je gelingen, genetische Formenreihen, wie etwa

bei den Säugetieren, aufzustellen. Es ist das jedoch weniger begründet in dem Mangel an Bindegliedern, als vielmehr in der Organisation der Fische überhaupt, namentlich der Teleostier. Besonders erschwerend macht sich die Unmenge von Konvergenzerscheinungen bemerkbar, wie die Scheibenform des Körpers, die Reduktion der Wirbelzahl, verbunden mit Streckung der bleibenden Wirbel oder die Ausdehnung der Rücken- und Afterflosse über einen großen, oft sogar über den größten Teil des Körperrandes, wobei auch der Leib nicht selten schlangenähnlichen Habitus erlangt. Eine öfters wiederkehrende Erscheinung ist auch die Umwandlung der ursprünglich stiftförmigen Zähne in ein Pflastergebiß. Diese Verhältnisse sowie die überraschende Formenmannigfaltigkeit der Teleostier im Eocaen drängt uns unwillkürlich die Vermutung auf, daß die Umformung bei den Fischen zum Teil doch viel rascher verlaufen müßte, als bei den Säugetieren mit ihrer so ruhigen und allmählichen Entwickelung. Im Gegensatz zu dieser Erscheinung steht aber wieder die Tatsache, daß hochgradige, schon im Eocaen erfolgte Spezialisierungen — z. B. die der Gymnodontiden, der Amphysiliden, der Trichiuriden und Xiphiiden sich so gut wie unverändert bis in die Gegenwart erhalten haben. Diese Verhältnisse sowie der oft recht mangelhafte Erhaltungszustand der tertiären Teleostier erschweren die Erkenntnis der genetischen Beziehungen in hohem Grade, so daß wir kaum hoffen dürfen, die Phylogenie der verschiedenen Teleostiergruppen in absehbarer Zeit eben so klar legen zu können wie die der Säugetiere. Wir wissen nur so viel, daß wir die spindelförmige Beschaffenheit des Körpers, frei schwimmende Lebensweise und stiftförmige Bezahnung als die ursprüngliche Organisation anzusehen haben.

Diese Übersicht über die Verbreitung und Stammesgeschichte der fossilen Fische war eigentlich für eine kommende neue Auflage von Zittels „Grundzüge", Bd. II, Vertebrata, bestimmt, für welche ich auch den die Fische behandelnden Abschnitt übernommen habe. Wenn ich diese Zusammenstellung jetzt schon veröffentliche, so geschieht es aus dem Grunde, weil

unter den jetzigen Verhältnissen das Erscheinen einer Neuauflage doch nicht sobald erfolgen dürfte, das gänzliche Fehlen dieser Übersicht in der letzten, ohnehin nicht sehr glücklichen Bearbeitung von Seite Kokens aber wohl allgemein als ein Mangel empfunden wird. Ich glaube daher im Sinne meines verstorbenen Lehrers v. Zittel zu handeln, wenn ich durch diese Veröffentlichung die letzte Auflage der „Grundzüge" einigermaßen zu ergänzen suche.

Über die Kongruenzeigenschaften von aus den natürlichen Zahlen gebildeten Potenzsummen.

Von A. Voss.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 5. Mai 1917.

Bezeichnet man die Summen

$$1^h + 2^h + 3^h + \cdots + n^h$$

für ganze positive h mit S_n^h, so ergeben sich für $h = 1, 2, 3, 4 \ldots$ Ausdrücke von der folgenden Form

$$S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}; \quad S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad S_n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$S_n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \, \frac{(3n^2+3n-1)}{5} \quad \ldots$$

und auch für die folgenden Werte von h treten bei ungeradem h stets die Faktoren $n^2(n+1)^2$, bei geradem h aber die Faktoren $n(n+1)\,(2n+1)$ hervor. Man kennt nun die allgemeine Entwicklung von S_n^h vermöge des aus den Bernoullischen Zahlen B_h gebildeten Bernoullischen Polynoms

$$\varphi_h(x+1) = \frac{(x+B)^{h+1} - B^{h+1}}{h+1},$$

das für ganze x mit dem S_x^h zusammenfällt, nämlich

$$2h\,\varphi_{2h-1}(x+1) = x^2(x+1)^2 M$$
$$2(2h+1)\,\varphi_{2h}(x+1) = x(x+1)(2x+1)\,N,$$

wobei M eine ganze rationale Funktion $h-2$ Grades in $x(x+1)$ ist, deren Koeffizienten aus den mit gewissen von h abhängigen

Faktoren multiplizierten Bernoullischen Zahlen B_1 bis zu B_{2h-2} gebildet sind, während N in ähnlicher Weise eine ganze rationale Funktion h-Grades von $x(x+1)$ ist, welche die Bernoullischen Zahlen bis zu B_{2h} nebst anderen Faktoren linear enthält[1]).

Aus dieser wichtigen, an die Eulersche Summationsformel anknüpfenden Darstellung geht nun freilich hervor, daß die Faktoren n, $n+1$, $2n+1$ und zum Teil auch deren Quadrate in den Werten der Potenzsummen auftreten. In welcher Weise aber, läßt sich dabei nicht übersehen, da die Bernoullischen Zahlen mit den Eulerschen ganzen Zahlen E durch die Formel

$$B_h = \frac{h(E+l)^{h-l}}{2^h(2^h-l)}$$

verknüpft sind. Ich führe daher im folgenden eine direkte Untersuchung, um das Auftreten jener Faktoren selbst in den Potenzsummen zu ermitteln. Dabei erwies es sich zweckmäßig, in Verbindung mit den S_n^h noch andere Summen, die mit Σ_n^h, Ω_n^h, Δ_n^h bezeichnet sind, heranzuziehen.

Einen wesentlichen Unterschied macht es dabei immer, ob h, der Index der Potenzsumme, gerade oder ungerade ist. Anstatt S_n^h soll übrigens, und so auch bei den anderen Summen, wo ein Mißverständnis ausgeschlossen ist, einfach S^h geschrieben, also nur der Index hervorgehoben werden.

§ 1.

Die Kongruenz $2S^h \equiv 0$; mod. $n(n+1)$ bei ungeradem h.

Hier liegt die Sache allerdings sehr einfach. Denn bei geradem n läßt sich das erste und letzte, das zweite und das vorletzte Glied usw. von

$$S^h = 1^h + 2^h + \cdots n^h$$

zu einem durch $n+1$ teilbaren Paare vereinigen, so daß also

[1]) Vgl. z. B. E. Cesàro, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis, deutsch von Kowalewski, Leipzig 1904, S. 302.

I a) $S^h \equiv 0$; mod $n+1$ für $n \equiv 0$ mod 2

ist. Ist aber n ungerade, so gilt dasselbe, nur bleibt das Mittelglied $\left(\frac{n+1}{2}\right)^h$ übrig, da das vorhergehende $\left(\frac{n-1}{2}\right)^h$ das folgende $\left(n+1-\frac{n-1}{2}\right)^h$ ist. Soll auch dies durch $n+1$ teilbar sein, so muß

$$(n+1)^h = 2^h(n+1)q$$

oder $(n+1)^{h-1} = 2^h q$, wo q eine ganze Zahl ist, sein.

Da nun $n = 2k+1$, so folgt

$$(k+1)^{h-1} = 2q$$

und diese Gleichung ist dann und nur dann erfüllt, wenn k eine ungerade Zahl ist. Es ergibt sich daher

I b) $S^h \equiv 0$; mod. $n+1$,

wenn $n = 4k - 1$ oder $= 2k$ ist.

Ebenso ist in S^h die Summe des ersten und vorletzten Gliedes usw. durch n teilbar. Bei ungeradem n ist daher

II a) $S^h \equiv 0$; mod. n.

Ist dagegen n gerade, so bleibt das Mittelglied $\left(\frac{n}{2}\right)^h$ übrig, da das vorhergehende $\left(\frac{n}{2}-1\right)$, das folgende $\left(n-\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)^h$ ist. Dies aber ist gleich dem $n$fachen einer ganzen Zahl q, wenn

$$n^{h-1} = 2^h q$$

ist, was dann und nur dann der Fall ist, wenn $n = 2k$, also

$$k^{h-1} = 2q,$$

oder k selbst eine gerade Zahl ist. Es ist daher allgemein

1) $2S^n \equiv 0$; mod. $n(n+1)$, dagegen

2) $S^n \equiv 0$; mod. $n+1$ für $n = 2k$, $4k-1$
$S^n \equiv 0$; mod. n für $n = 2k-1$, $4k$

bei ungeradem h.

Man kann natürlich auch so verfahren, daß man

$$S^h = (n-(n-1))^h + (n-(n-2))^h + \cdots + (n-1)^h + n^h$$

setzt, woraus sofort bei ungeradem h

$$2\,S^h = n\,P$$

und in analoger Weise

$$2\,S^h = (n+1)\,Q$$

folgt, womit wieder 1) bewiesen ist, während die genaueren Angaben unter 2) unberücksichtigt bleiben.

Aber dieser einfache Weg läßt sich bei geradem h nicht mehr benutzen. In Wirklichkeit liegen auch die Verhältnisse bei geradem h ganz anders; sie erfordern zunächst die Untersuchung der Teilbarkeit von S^h nach dem Modul $2n+1$, der im folgenden beständig durch σ bezeichnet werden soll.

§ 2.

Die Summen S^h und Σ^h.

Aus der Identität

$$(n+1)^h - (n-1)^h = 2\left\{\binom{h}{1} n^{h-1} + \binom{h}{3} n^{h-3} + \cdots + \binom{h}{4} n^4 + \binom{h}{2} n^2 + 1\right\}$$

bei ungeradem h findet man sogleich

$$(n+1)^h - (n-1)^h = 2\left\{\binom{h}{1} n^{h-1} + \binom{h}{3} n^{h-3} + \cdots + \binom{h}{2} n^2 + 1\right\}$$

$$(n-1)^h - (n-3)^h = 2\left\{\binom{h}{1}(n-2)^{h-1} + \binom{h}{3}(n-2)^{h-3} + \cdots + \binom{h}{2}(n-2)^2 + 1\right\}$$

$$(n-3)^h - (n-5)^h = 2\left\{\binom{h}{1}(n-4)^{h-1} + \binom{h}{3}(n-4)^{h-3} + \cdots + \binom{h}{2}(n-4)^2 + 1\right\}$$

. . . .

Ist nun $n = 2k - 1$, so lautet die letzte, $k$te Gleichung

$$(n - (2k+1))^h - (n - (2k-1))^h = 2\left\{\binom{h}{1} + \binom{h}{3} + \cdots + \binom{h}{2} + 1\right\}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen entsteht

$$\begin{aligned}(n+1)^h = 2\Big\{&\binom{h}{1}(1 + 3^{h-1} + \cdots + (2k-1)^{h-1}) \\ &+ \binom{h}{3}(1 + 3^{h-3} + \cdots + (2k-1)^{h-3}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \binom{h}{2}(1 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2) + k\Big\},\end{aligned}$$

in der rechts die Potenzsummen der ungeraden Zahlen auftreten. Setzt man daher

$$1)\qquad \Sigma_n^h = 1 + 3^h + 5^h + \cdots (2n-1)^h = \Sigma^h,$$

so ergibt sich, falls man linker Hand $n = 2k - 1$ setzt, und dann wieder statt h n schreibt, die folgende, für jedes n und ungerades h gültige Gleichung

$$\text{I)}\qquad 2^{h-1}n^h - n = \binom{h}{1}\Sigma^{h-1} + \binom{h}{3}\Sigma^{h-3} + \cdots + \binom{h}{4}\Sigma^4 + \binom{h}{2}\Sigma^2.$$

Diese Formel kann zur rekurrenten Berechnung der sämtlichen Σ von geradem Index dienen. Ist dagegen $n = 2k$, so erhält man auf dieselbe Weise

$$(2k+1)^h - (2k-1)^h = 2\left\{\binom{h}{1}2^{h-1}k^{h-1} + \binom{h}{3}2^{h-3}k^{h-3} + \cdots + \binom{h}{2}2^2k^2 + 1\right\},$$

$$(2k-1)^h - (2k-3)^h = 2\left\{\binom{h}{1}2^{h-1}(k-1)^{h-1} + \binom{h}{3}2^{h-3}(k-1)^{h-3} + \cdots + \binom{h}{2}2^2(k-1)^2 + 1\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und als letzte, k te Gleichung

$$(2+1)^h-(2-1)^h=2\left\{\binom{h}{1}2^{h-1}+\binom{h}{3}2^{h-3}+\cdots+\binom{h}{2}2^2+1\right\}$$

mithin für jedes n bei ungeradem h

$$\text{II)}\quad \begin{aligned}(2n+1)^h-(1+2n)=2\Big\{\binom{h}{1}2^{h-1}S^{h-1}+\binom{h}{3}2^{h-3}S^{h-3}+\cdots\\ +\binom{h}{2}2^2S^2\Big\},\end{aligned}$$

womit die S^h von geradem Index rekurrent dargestellt wird.

Ist nun zweitens h gerade, so ergibt sich auf analoge Weise

$$\begin{aligned}(n+1)^h-(n-1)^h=2\Big\{\binom{h}{1}n^{h-1}+\binom{h}{3}n^{h-3}+\cdots\\ +\binom{h}{3}n^3+\binom{h}{1}n\Big\},\end{aligned}$$

also bei ungeradem $n=2k-1$

$$\text{III)}\quad 2^{h-1}k^h=\binom{h}{1}\Sigma_k^{h-1}+\binom{h}{3}\Sigma_k^{h-3}+\cdots+\binom{h}{1}\Sigma_k^1.$$

Bei geradem $n=2k$ hat man endlich

$$\text{IV)}\quad \begin{aligned}(2n+1)^h-1=2\Big\{\binom{h}{1}2^{h-1}S^{h-1}+\binom{h}{3}2^{h-3}S^{h-3}+\cdots\\ +2^3\binom{h}{3}S^3+2\binom{h}{2}S^1\Big\},\end{aligned}$$

also zwei weitere Rekursionsformeln für die S und Σ mit ungeradem Index. Die Formeln II), IV) sind einfacher, wie die gewöhnlich zur Bestimmung der S^h angewendete; sie bieten auch bei der Ausrechnung im Gegensatz zu der Anwendung der Bernoullischen Zahlen den Vorteil, daß die fraglichen Faktoren n, $n+1$, $2n+1$ sich ganz ohne Mühe erkennen lassen. So ist z. B., wenn $\Theta=n\,(n+1)\,(2n+1)$ gesetzt wird

$$90\,S^8=\Theta\{5(n^6+3n^5+n^4-3n^3)-n^2(9n-3)\}$$

und die rechte Seite ist immer durch $2\cdot5\cdot9$ teilbar.

Daß übrigens $(2n+1)\,((2n+1)^{h-1}-1)$ in II) bei ungeradem h immer den Faktor 2^3 enthält, sieht man sofort, wenn man die beiden letzten Glieder der Entwicklung von $(2n+1)^{h-1}-1$ zu

$$2n(h-1)\;(n(h-2)+1)$$

zusammenrückt. Und ebenso enthält die linke Seite von IV) den Faktor 2^3, denn die Vereinigung der beiden letzten Glieder derselben liefert hier

$$2nh\,(n(h-1)+1).$$

§ 3.

Beziehungen zwischen S^h und Σ^h.

Wir betrachten jetzt gleichzeitig die beiden Summen

$$\text{1)}\qquad \begin{aligned} S^h &= 1^h + 2^h + \cdots + n^h \\ \Sigma^h &= 1^h + 3^h + \cdots + (2n-1)^h. \end{aligned}$$

Aus der Identität

$$\begin{aligned} 2^h S^h = (\sigma - (2n-1))^h + (\sigma - (2n-3))^h + \cdots \\ + (\sigma - 3)^h + (\sigma - 1)^h \end{aligned}$$

für $\sigma = 2n+1$ erhält man

$$\text{2)}\qquad \begin{aligned} 2^h S^h = n\sigma^h - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}\Sigma^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}\Sigma^2 + \cdots \\ + (-1)^{h-1}\binom{h}{1}\sigma\,\Sigma^{h-1} + (-1)^h\,\Sigma^h. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma^h &= 1 + 3^h + 5^h + \cdots + (2n-1)^h \\ 2^h S^h &= 2^h + 4^h + \cdots + (2n-2)^h + (2n)^h \end{aligned}$$

folgt durch Addition

$$\text{3)}\qquad \Sigma^h + 2^h S^h = S^h + P,$$

falls $\qquad P = (n+1)^h + (n+2)^h + \cdots + (2n)^h$

gesetzt wird. Bringt man nun P auf die Form

$$P = (\sigma - n)^h + (\sigma - (n-1))^h + \cdots + (\sigma - 1)^h,$$

so folgt

$$P = n\sigma^h - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 + \binom{h}{2}\sigma^{-h-2}S^2 + \cdots$$
$$+ (-1)^{h-1}\binom{h}{1}S^{h-1} + (-1)^{h-1}S^h,$$

so daß nun aus 3) folgt

$$4)\quad \Sigma^h + 2^h S^h = S^h + n\sigma^h - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}S^2 + \cdots$$
$$+ (-1)^{h-1}\binom{h}{1}\sigma S^{h-1} + (-1)^h S^h.$$

Durch diese Gleichung, welche zugleich die Umkehrung des Systems der linearen Gleichungen 2) für die Σ darstellt, sind sämtliche Σ vermöge der S bestimmt. Setzt man diesen Wert von Σ^h an Stelle des letzten Gliedes von 2) rechts ein, so folgt die Gleichung

$$((2^h - 1)S_n^h - n\sigma^h)(1 + (-1)^h) = -\binom{h}{1}\sigma^{h-1}\Sigma^1$$
$$5)\qquad + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}\Sigma^2 + \cdots + (-1)^{h-1}\binom{h}{1}\sigma\Sigma^{h-1}$$
$$+ (-1)^h\left\{-\binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}S^2 + \cdots + (-1)^{h-1}\binom{h}{1}\sigma S^{h-1}\right\}.$$

Ist nun h eine gerade Zahl, so ergibt sich aus 5) die neue Gleichung

$$2\cdot(2^h - 1)S^h = 2n\sigma^h - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}(\Sigma^1 + S^1) + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}(\Sigma^2$$
$$+ S^2) - \cdots - \binom{h}{1}\sigma(\Sigma^{h-1} + S^{h-1}),$$

aus der die für das folgende wichtige Kongruenz

$$\text{I)}\qquad (2^h - 1)S_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } \sigma \text{ für } h \equiv 0;\ \text{mod. } 2$$

folgt, da der Faktor 2 links offenbar wegen des ungeraden σ fortgelassen werden kann.

Aus 2) folgt noch

$$2^h S^h - (-1)^h \Sigma^h \equiv 0;\ \text{mod. } \sigma$$

oder bei geradem h

$$2^h S^h - \Sigma^h \equiv 0; \text{ mod. } \sigma \text{ für } h \equiv 0; \text{ mod. } 2;$$

bei ungeradem h dagegen

$$2^h S^h + \Sigma^h \equiv 0; \text{ mod. } \sigma.$$

Aus I) folgt jetzt mit Hülfe der eben gewonnenen Kongruenz bei geradem h

II) $$S^h - \Sigma^h \equiv 0; \text{ mod. } \sigma, \text{ für } h \equiv 0; \text{ mod. } 2.$$

Daß der Faktor $2^h - 1$ in I) hinreichend ist, damit die Kongruenz bestehe, ist vorhin gezeigt. Dabei erhebt sich aber zunächst die Frage, ob nicht schon einer der beiden Teilfaktoren von

$$2^h - 1 = \left(2^{\frac{h}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{h}{2}} + 1\right)$$

schon genügt, um die Kongruenz herbeizuführen, oder auch vielleicht irgend ein anderer, bei speziellen Werten von h auftretender Teiler von $2^h - 1$. Das letztere kann natürlich eintreten, so daß man nicht verlangen wird, daß die hier gefundenen Resultate mit jeder weiteren Vereinfachung bei wirklicher Ausrechnung übereinstimmen werden. Auch für das folgende ist der Gesichtspunkt festzuhalten, daß der charakteristische Faktor $2^h - 1$ eben für alle h gültig sein soll.

Daß nun aber unter dieser Voraussetzung nicht etwa einer der Teilfaktoren desselben bereits ausreicht, lehren die einfachsten Beispiele. So ist z. B. $S_3^6 = 65$ nicht durch 7, $S_4^6 = 4890$ nicht durch 9, $S_{10}^6 = 1078405$ nicht durch 21 teilbar, so daß die beiden Faktoren von $2^6 - 1 = 7 \cdot 9$ erforderlich sind.

Freilich kommen auch andere Fälle vor. Für $h = 8$ ist $2^8 - 1 = 255 = 17\,(3 \cdot 5)$, und es ist $S_2^8 = 257$ nicht durch 5, $S_4^8 = 72354$ nicht durch 9 teilbar. Aber $S_8^8 = 24684612$ ist durch 17 schon selbst teilbar, so daß in diesem speziellen Falle der Faktor $2^4 + 1$ überflüssig ist, und ähnlich ist es auch bei $h = 10$, wo der Faktor $2^5 - 1 = 31$ in $S_{15}^{10} = 529882277575$ schon selbst enthalten ist. Dies steht damit in Zusammenhang, daß nach einer später zu erweisenden Formel dann be-

reits S_n^{h-1} denselben Faktor hat, also in den soeben angegebenen Fällen $S_8^7 = 3297456$ schon durch 17[1]), S_{15}^9 durch 31 teilbar ist. Ich habe die Frage, wann bei ungeradem h $S^h \equiv 0$; mod. σ ist, nicht weiter verfolgen können.

§ 4.

Neue Rekursionsformel für S^h.

Nach § 3, 5) ist bei geradem h

$$2(2^h - 1) S^h = 2 n \sigma^h - \binom{h}{1} \sigma^{h-1} \Sigma^1 + \binom{h}{2} \sigma^{h-2} \Sigma^2 \dots - \binom{h}{1} \sigma \Sigma^{h-1}$$

$$1) \qquad - \binom{h}{1} \sigma^{h-1} S^1 + \binom{h}{2} \sigma^{h-2} S^2 \dots - \binom{h}{1} \sigma S^{h-1}.$$

Ersetzt man jetzt rechts jedes Σ durch seinen Wert nach § 3, 4)

$$\Sigma^k = (1 - 2^k) S^k + n \sigma^k - \binom{h}{1} \sigma^{k-1} S^1 + \binom{h}{2} \sigma^{k-2} S^2 -$$

$$2) \qquad + (-1)^{k-1} \binom{h}{1} \sigma S^{k-1} + (-1)^k S^k,$$

so läßt sich S^h rekurrent durch die S von niederem Index ausdrücken. Um diese Rechnung, die bei direkter Ausführung besondere Betrachtungen über Binomialkoeffizienten erfordert, bequem durchführen zu können, ist es zweckmäßig, S^k durch eine symbolische Potenz $(S)^k$ zu ersetzen, was offenbar gestattet ist, so lange es sich nur um lineare Verbindungen der S^k handelt. Man erhält so an Stelle von 2) die einfachere Gleichung

$$2\,a) \qquad \Sigma^k = (1 - 2^k) S^k + n \sigma^k + (\sigma - S)^k - \sigma^k.$$

Führt man nun die symbolischen Potenzen von S auch im zweiten, die S^k enthaltenden Teil von 1) ein, welcher dann gleich $(\sigma - S)^h - \sigma^h - S^h$ ausfällt, so ergibt sich als Wert der linken Seite von 1) der Ausdruck

---

[1]) Es ist daher auch Σ_8^7 durch 17 teilbar.

$$2n\sigma^h - \binom{h}{1}\{n\sigma + (1-2)S^1 + (\sigma - S) - \sigma\}\,\sigma^{h-1}$$
$$+ \binom{h}{2}\{n\sigma^2 + (1-2^2)S^2 + (\sigma - S)^2 - \sigma^2\}\,\sigma^{h-2}$$
$$- \binom{h}{3}\{n\sigma^3 + (1-2^3)S^3 + (\sigma - S)^3 - \sigma^3\}\,\sigma^{h-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \binom{h}{2}\{n\sigma^{h-2} + (1-2^{h-2})S^{h-2} + (\sigma - S)^{h-2} - \sigma^{h-2}\}\,\sigma^2$$
$$- \binom{h}{2}\{n\sigma^{h-1} + (1-2^{h-1})S^{h-1} + (\sigma - S)^{h-1} - \sigma^{h-1}\}\,\sigma$$
$$+ (\sigma - S)^h - \sigma^h - S^h.$$

Die Summation dieser Glieder ergibt für diejenigen Teile, welche keine S^k, sondern nur symbolische Potenzen von S enthalten

$$n\sigma^h\left\{2 - \binom{h}{1} + \binom{h}{2} - \cdots + \binom{h}{2} - \binom{h}{1}\right\}$$
$$+ \sigma^h\left\{\binom{h}{1} - \binom{h}{2} + \binom{h}{3} \cdots - \binom{h}{2} + \binom{h}{1} - 1\right\} - \sigma^h$$
$$+ \sigma^h - \binom{h}{1}\sigma^{h-1}(\sigma - S) + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}(\sigma - S)^2 - \cdots$$
$$- \binom{h}{1}\sigma(\sigma - S)^{h-1} + (\sigma - S)^h - S^h.$$

Da hier nun die beiden ersten Zeilen gleich Null sind, und auch die dritte den Wert

$$(\sigma - (\sigma - S))^h - S^h = 0$$

besitzt, ergibt sich bei geradem h die grundlegende Entwicklung

$$2(2^h - 1)S^h = (2-1)\binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 + (1-2^2)\binom{h}{2}\sigma^{h-2}S^2 + \cdots$$

1) $$+ (1-2^{h-2})\binom{h}{2}\sigma^2 S^{h-2} + (2^{h-1} - 1)\binom{h}{1}\sigma S^{h-1},$$

in der n, außer in σ, nicht mehr vorkommt, und jedes S^k rechts mit dem charakteristischen Faktor $(2^k - 1)$ multipliziert ist.

Bei ungeradem h ergibt sich auf dieselbe Weise aus 5)

$$0 = (2-1)\binom{h}{1}\sigma^{h-2}S^1 + (1-2^2)\binom{h}{2}\sigma^{h-3}S^2 + \cdots$$
$$+ (2^{h-2}-1)\binom{h}{2}\sigma S^{h-2} + \binom{h}{1}(1-2^{h-1})S^{h-1},$$

oder für $h-1 = h_1$

$$\text{II)}\qquad (h_1+1)(2^{h_1}-1)S^{h_1} = (2-1)\binom{h_1+1}{1}\sigma^{h_1-1}S^1$$
$$+(1-2^2)\binom{h_1+1}{2}\sigma^{h_1\cdot 2}S^2 + \cdots + \binom{h_1+1}{2}(2^{h_1-1}-1)\sigma S^{h_1-1},$$

so daß sich wieder nur eine Relation für den geraden Index h_1 ergibt. Sie wiederholt indessen, obwohl sie keineswegs identisch mit der Gleichung I) ist, nur in weniger ausdrucksvoller Form die Kongruenz

$$(2^{h_1}-1)S^{h_1} \equiv 0;\ \text{mod. } \sigma.$$

Aus II) folgt noch, daß, wenn S^{h_1-1} bereits den Faktor σ hat, $(2^{h_1}-1)S^{h_1}$ denselben Faktor quadratisch enthalte, worauf schon am Schluß von § 4 aufmerksam gemacht wurde.

Hätte man übrigens direkt die Summen Σ in die Gleichung 1) eingetragen, so muß man ebenfalls zur Gleichung I) oder II) gelangen. Da nun zwischen den S^k hierbei keine weiteren Beziehungen benutzt werden, so müssen sich auch genau dieselben Koeffizienten ergeben. Hieraus erhält man die folgenden Identitäten zwischen Binomialkoeffizienten, und zwar bei geradem h:

$$\binom{h}{k} - \binom{k+1}{k}\binom{h}{k+1} + \binom{k+2}{k}\binom{h}{k+2}$$
$$+\cdots(-1)^{k-1}\binom{h-1}{k}\binom{h}{k-1} = (-1)^{k-1}\binom{h}{k},$$

bei ungeradem h dagegen:

$$\binom{h}{k} - \binom{k+1}{k}\binom{h}{k+1} + \binom{k+2}{k}\binom{h}{k+2}$$
$$+\cdots(-1)^{k}\binom{h-1}{k}\binom{h}{h-1} = (-1)^{k}\binom{h}{k},$$

wobei $k < h$ zu nehmen ist. Sie lassen sich auch ohne Schwierigkeit direkt erweisen.

Eine zu I) analoge Formel läßt sich nun auch für die Summen Σ herleiten. Man hat zunächst nach § 3, 2)

$$2^h S^n = (n-1)\sigma^h + (\sigma - \Sigma)^h \tag{3}$$

bei *jedem* h, wenn man an Stelle von Σ^h ebenfalls eine symbolische Potenz $(\Sigma)^h$ einführt. Nun ist bei *geradem* h nach § 3, 5)

$$\begin{aligned} 2(2^h-1)S^h &= (2n-1)\sigma^h + (\sigma-\Sigma)^h - \Sigma^h \\ &- \binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}S^2 - \cdots - \binom{h}{1}\sigma S^{h-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Zieht man von der mit 2 multiplizierten Gleichung 3) die Gleichung 4) ab, so bleibt

$$\begin{aligned} 2S^h &= 2(n-1)\sigma^h - (2n-1)\sigma^h + (\sigma-\Sigma)^h + \Sigma^h + \cdots \\ &+ \binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 - \binom{h}{2}\sigma^{h-2}S^2 + \cdots + \binom{h}{1}\sigma S^{h-1} \end{aligned}$$

oder, wenn man die symbolischen Potenzen wieder entfernt

$$\begin{aligned} S^h &= -\binom{h}{1}\sigma^{h-1}\Sigma^1 + \binom{h}{2}\sigma^{h-2}\Sigma^2 - \binom{h}{3}\sigma^{h-3}\Sigma^3 + \cdots \\ &+ (-1)^1\binom{h}{1}\sigma\Sigma^{h-1} + 2\Sigma^h + \binom{h}{1}\sigma^{h-1}S^1 - \binom{h}{2}\sigma^{h-2}\Sigma^2 \\ &+ \binom{h}{3}\sigma^{h-3}\Sigma^3 + \binom{h}{1}\sigma\Sigma^{h-1} - S^h \end{aligned} \tag{5}$$

eine Formel, die, nebenbei bemerkt, dadurch von Interesse erscheint, daß sie die *Differenz* $\Sigma^k - S^k$ rekurrent bei *geradem* h ausdrückt.

Nun ersetze man in 5) *links* S^h durch seinen Wert aus 3). Dann folgt

$$\frac{(n-1)\sigma^h + (\sigma-\Sigma)^h}{2^h} = (\sigma-\Sigma)^h - \sigma^h + \Sigma^h + P, \tag{5 a}$$

wobei, wenn man auch *rechts* alle S^k nach 3) einsetzt, der Ausdruck P gleich

$$\binom{h}{1}\sigma^{h-1}\frac{1}{2}((n-1)\sigma+\sigma-\Sigma)-\binom{h}{2}\sigma^{h-2}\frac{1}{2^3}((n-1)\sigma^2$$
$$+(\sigma-\Sigma)^2)+\cdots+\binom{h}{1}\sigma\frac{1}{2^{h-1}}((n-1)\sigma^{h-1}+(\sigma-\Sigma)^{h-1})$$
$$-\frac{(n-1)\sigma^h+(\sigma-\Sigma)^h}{2^h}$$

wird. Dieser Wert aber kann, wenn man alle σ^h enthaltenden Glieder zusammenfaßt, folgendermaßen geschrieben werden:

$$P=(n-1)\sigma^h\left\{\binom{h}{1}\frac{1}{2}-\binom{h}{2}\frac{1}{2^2}+\binom{h}{3}\frac{1}{2^3}-\cdots\right.$$
$$\left.+\binom{h}{1}\frac{1}{2^{h-1}}-\frac{1}{2^h}\right\}+\binom{h}{1}\sigma^{h-1}\frac{1}{2}(\sigma-\Sigma)-\binom{h}{2}\sigma^{h-2}\frac{1}{2^2}(\sigma-\Sigma)^2$$
$$+\cdots+\binom{h}{1}\frac{1}{2^{h-1}}(\sigma-\Sigma)^{h-1}-\frac{(\sigma-\Sigma)^h}{2^h}$$

oder, wenn man nach dem binomischen Satze die beiden Teile je für sich gruppiert

$$P=(n-1)\sigma^h\left\{-1+\binom{h}{1}\frac{1}{2}-\binom{h}{2}\frac{1}{2^2}\cdots-\frac{1}{2^h}\right\}+(n-1)\sigma^h+\sigma^h$$
$$+\left\{-\sigma^h+\binom{h}{1}\sigma^{h-1}\frac{\sigma-\Sigma}{2}-+\cdots+\binom{h}{1}\frac{(\sigma-\Sigma)^{h-1}}{2^{h-1}}-\frac{(\sigma-\Sigma)^h}{2^h}\right\},$$

so daß

$$P=(n-1)\sigma^h\left(1-\frac{1}{2^h}\right)-\frac{1}{2^h}(\sigma+\Sigma)^h+\sigma^h$$

wird. Es ergibt sich also aus 5a)

$$\frac{(n-1)\sigma^h}{2^h}=(\sigma-\Sigma)^h\left(1-\frac{1}{2^h}\right)-\sigma^h+\Sigma^h$$
$$+(n-1)\sigma^h\left(1-\frac{1}{2^h}\right)-\frac{1}{2^h}(\sigma+\Sigma)^h$$

oder

$$(\sigma-\Sigma)^h(2^h-1)=-2(n-1)\sigma^h(2^{h-1}-1)+(\sigma+\Sigma)^h-2^h\Sigma^h,$$

also, wenn man endlich wieder zu den Ausdrücken Σ^k selbst übergeht

$$\Sigma^h(2^h-1)+n(2^{h-1}-1)=\sigma 2^h\left\{\binom{h}{1}\sigma^{h-2}\Sigma^1+\binom{h}{3}\sigma^{h-4}\Sigma^3+\cdots+\binom{h}{1}\Sigma^{h-1}\right\}-2(2^{h-1}-1)\sigma^2\left\{\binom{h}{2}\sigma^{h-4}\Sigma^2+\cdots+\binom{h}{2}\Sigma^{h-2}\right\}.$$

§ 5.

Die Kongruenz $2(2^h-1)S^h\equiv 0$; mod. $n(n+1)$ bei geradem h.

Die Formel I) des § 4 zeigt nun auch den Weg, um zur Entscheidung über die in S^h auftretenden Faktoren $n(n+1)$ bei geradem h zu gelangen.

Setzt man zur Abkürzung

$$(2^h-1)S^h=\varrho_h,$$

so ist nach derselben

$$2\varrho_h=\binom{h}{1}\varrho_1\sigma^{h-1}+\binom{h}{3}\varrho_3\sigma^{h-3}+\cdots+\binom{h}{3}\varrho_{h-3}\sigma^3+\binom{h}{1}\varrho_{h-1}\sigma-\left\{\binom{h}{2}\varrho_2\sigma^{h-2}+\binom{h}{4}\varrho_4\sigma^{h-4}+\cdots+\binom{h}{2}\varrho_{h-2}\sigma^2\right\},$$

wobei in dem zweiten mit dem Minuszeichen versehenen Teile nur Potenzsummen von geradem Index, im ersten nur solche von ungeradem vorkommen. Setzt man jetzt $\sigma=2n+1$ und entwickelt nach Potenzen von n, so folgt[1])

$$1)\quad 2\varrho_h=nP+\binom{h}{1}\varrho_1+\binom{h}{3}\varrho_3+\cdots+\binom{h}{3}\varrho_{h-3}+\binom{h}{1}\varrho_{h-1}-\left\{\binom{h}{2}\varrho_2+\binom{h}{4}\varrho_4+\cdots+\binom{h}{2}\varrho_{h-2}\right\},$$

wird dagegen $\sigma=2(n+1)-1$ genommen, und dann nach den Potenzen von $n+1$ entwickelt, so folgt

$$2)\quad 2\varrho_h=(n+1)Q-\left\{\binom{h}{1}\varrho_1+\binom{h}{3}\varrho_3+\cdots+\binom{h}{3}\varrho_{h-3}+\binom{h}{1}\varrho_{h-1}\right\}-\left\{\binom{h}{2}\varrho_2+\binom{h}{4}\varrho_4+\cdots+\binom{h}{2}\varrho_{h-2}\right\}.$$

[1]) Unter P und Q sind hier wie auch im folgenden ganzzahlige Ausdrücke zu verstehen.

Es ist jetzt zu beweisen, daß die in 1) und 2) rechterhand die ϱ enthaltenden Teile mod. n und mod. $n+1$ der Null kongruent sind. Für die Anfangswerte von h, etwa von 2 bis 20, läßt sich dies direkt erkennen, wenn man aufmerksam die Gruppierung der bereits gefundenen ϱ mit den Binomialkoeffizienten betrachtet. Aber der allgemeine Nachweis, daß

$$3) \qquad 2\varrho_h \equiv 0; \text{ mod. } n(n+1)$$

läßt sich auf diesem Wege nicht wohl erbringen, weil dabei ganz spezielle Zahleneigenschaften dieser Koeffizienten zur Verwendung kommen. Man wird daher versuchen, die vollständige Induktion anzuwenden.

Es sei demnach vorausgesetzt, daß für $h = 2, 4, \dots h-2$ der Satz 3) bereits bestehe. Dann läßt sich auf Grund von 1) und 2) und nach § 1 behaupten, daß jedenfalls

$$4\varrho_h \equiv 0; \text{ mod. } n(n+1)$$

sein muß. Aber daraus würde mit Sicherheit nur geschlossen werden können, daß allgemein

$$2^\mu \varrho_h \equiv 0; \text{ mod. } n(n+1)$$

sein muß, wobei μ eine ganze positive Zahl ist.

Es soll nun gezeigt werden, daß $\mu = 1$ ist. Dazu führt die Anwendung der bekannten Rekursionsformel, die man zur Berechnung der S^k anzuwenden pflegt, welche wir hier anführen, weil sie auch weiterhin zur Verwendung gelangt. Es ist

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \binom{h}{1} n^k + \binom{h}{2} n^{k-1} + \cdots + \binom{h}{2} n^2 + \binom{h}{1} n + 1$$

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = \binom{h}{1}(n-1)^k + \binom{h}{2}(n-1)^{k-1} + \cdots$$
$$+ \binom{h}{2}(n-1)^2 + \binom{h}{2}(n-1) + 1$$

. . . .

$$2^{k+1} - 1^{k+1} = \binom{h}{1} 1 + \binom{h}{2} 1 \cdots + \binom{h}{2} 1 + \binom{h}{1} 1 + 1,$$

wobei rechts der Abkürzung wegen $h = k + 1$ gesetzt ist. Durch Addition folgt

$$1)\quad (n+1)^{k+1} - (n+1) = \binom{h}{1} S^k + \binom{h}{2} S^{k-1} + \cdots + \binom{h}{2} S^2 + \binom{h}{1} S^1$$

und die linke Seite hat den Faktor $n(n+1)$.

Nun ist nach § 3, II) bei ungeradem h

$$2)\quad \frac{(2n+1)^{h-1} - 1)(2n+1)}{2} = \binom{h}{1} 2^{h-1} S^{h-1} + \binom{h}{3} 2^{h-3} S^{h-3} + \cdots + \binom{h}{2} 2^2 S^2.$$

Setzt man in 1) $k = h - 1$, so ist

$$3)\quad (n+1)((n+1)^{h-1} - 1) = \binom{h}{1} S^{h-1} + \binom{h}{2} S^{h-2} + \cdots + \binom{h}{2} S^2 + \frac{h}{1} S^1.$$

Durch Subtraktion der Gleichung 3) von der Gleichung 2) ergibt sich

$$4)\quad \begin{aligned} &\frac{((2n+1)^{h-1} - 1)(2n+1)}{2} - (n+1)((n+1)^{h-1} - 1) \\ &= \binom{h}{1} \varrho_{h-1} + \binom{h}{3} \varrho_{h-3} + \cdots + \binom{h}{2} \varrho_2 \\ &- \left\{ \binom{h}{2} S^{h-2} + \binom{h}{4} S^{h-4} + \cdots + \binom{h}{1} S^1 \right\}. \end{aligned}$$

Multipliziert man die Identität 4) noch mit 2, so haben rechts alle $S^1, S^3, \ldots S^{h-2}$ wegen des ungeraden h nach § 1 den Faktor $n(n+1)$. Aber auch die linke Seite hat ihn, denn

$$(2n+1)^{h-1} - 1$$

ist gleich Null für $n = 0$ und für $n = -1$ wegen des geraden $h - 1$. Wird nun vorausgesetzt, daß die zu erweisende Kongruenz bereits für

$$2\varrho_2,\ 2\varrho_4,\ \ldots\ 2\varrho_{h-3}$$

besteht, so erhält man aus 4)

$$2 h \varrho_{h-1} \equiv 0; \text{ mod. } n(n+1),$$

d. h. die Kongruenz besteht auch für den nächst höheren Index $h-1$. Und da h ungerade ist, vorhin aber bereits erkannt war, daß der Faktor von ϱ_{h-1} nur eine Potenz von 2 sein kann, folgt jetzt $\mu = 1$. Somit ist die Kongruenz

$$2 \varrho_{h-1} \equiv 0; \text{ mod. } n(n+1)$$

für $h \equiv 1$; mod. 2 allgemein als richtig erwiesen.

§ 6.

Über die Kongruenz $A S^h \equiv 0$; mod. $n^2(n+1)^2$ bei ungeradem h.

Mit Hülfe der vorhergehenden Untersuchung gelingt es jetzt auch, die Teilbarkeit von S^h durch $n^2(n+1)^2$ bei ungeradem h zu erkennen. Dazu dienen zunächst die an § 1 anknüpfenden Entwicklungen.

Setzt man bei ungeradem h

$$S^h = (n-(n-1))^h + (n-(n-2))^h + \cdots + (n-1)^h + n^h$$

und entwickelt nach Potenzen von n, so erhält man

$$\text{I)} \quad \begin{aligned} 2 S^h = n^h(n+1) - \binom{h}{1} n^{h-1} S^1 + \binom{h}{2} n^{h-2} S^2 + \cdots \\ - \binom{h}{2} n^2 S^{h-2} + \binom{h}{1} n S^{h-1} \end{aligned}$$

und ebenso entsteht aus

$$\begin{aligned} S^n = (n+1-n)^h + (n+2-n)^h + \cdots + (n+1-2)^h \\ + (n+1-1)^h \end{aligned}$$

$$\text{II)} \quad \begin{aligned} 2 S^h = n(n+1)^h - \binom{h}{1}(n+1)^{h-1} S^1 + \binom{h}{2}(n+1)^{h-2} S^2 - \cdots \\ - \binom{h}{2}(n+1)^2 S^{h-2} + \binom{h}{1}(n+1) S^{h-1}. \end{aligned}$$

Subtrahiert man von der mit n multiplizierten Gleichung II) die mit $n+1$ multiplizierte Gleichung I), so bleibt

$$\text{1)} \qquad -2 S^h = n^2(n+1)^2((n+1)^{h-2} - n^{h-2}) + P,$$

wo P in folgender Weise geschrieben werden kann

$$P = -\left\{\binom{h}{1} S^1(n(n+1)^{h-1} - (n+1)n^{h-1}) + \binom{h}{2} S^3(n(n+1)^{h-3} - (n+1)n^{h-3}) + \cdots + \binom{h}{2} S^{h-2}(n(n+1)^2 - (n+1)n^2)\right\}$$
$$+ \binom{h}{2} S^2(n(n+1)^{h-2} - (n+1)n^{h-2}) + \binom{h}{4} S^4(n(n+1)^{h-4} - (n+1)n^{h-4}) + \cdots + \binom{h}{2} S^{h-3}(n(n+1)^3 - (n+1)n^3).$$

Aus der Gleichung 1) folgt unmittelbar die in § 1 auf anderem Wege bewiesene Kongruenz

$$2\,S^h \equiv 0;\ \text{mod. } n(n+1) \text{ für } h \equiv 1;\ \text{mod. } 2,$$

denn jedes Glied hat jetzt rechts den Faktor $n(n+1)$, der nun durch τ bezeichnet werden soll.

Multipliziert man jetzt 1) mit 2, so hat jedes rechts vorkommende S^h von ungeradem Index den Faktor τ. Man hat daher:

$$2)\quad -4\,S^h = \tau^2\left\{((n+1)^{h-2} - n^{h-2}) - \binom{h}{1}\frac{2\,S^1}{\tau}((n+1)^{h-2} - n^{h-2}) + \cdots - \binom{h}{2}\frac{2\,S^{k-2}}{\tau}(n+1-n)\right\} + \tau\left\{\binom{h}{2} 2\,S^2((n+1)^{h-3} - n^{h-3}) + \binom{h}{4} 2\,S^4((n+1)^{h-5} - n^{h-5}) + \cdots + \binom{h}{3} 2\,S^{h-3}((n+1)^2 - n^2)\right\}.$$

Nun würde man, wenn jede der Summen S^k mit geradem Index mit ihrem charakteristischen Faktor multipliziert und dividiert, auch aus dem zweiten Teile in 2) den Faktor τ^2 absondern können. Aber hierbei würde eine sehr unvollkommene Betrachtung entstehen, weil das Auftreten des Faktors τ bei einem S^{2k} von dem bei allen niederen Indices $k = 1, 2, \ldots$ abhängig gemacht würde, und dieselbe Unübersichtlichkeit eintritt, die bei der Anwendung der Bernoullischen Zahlen vorliegt. Es bleibt vielmehr zu zeigen, daß man auf viel einfachere Art auch in dem zweiten Teil von 2 den Faktor τ^2 erkennen kann.

Zu diesem Zwecke setzen wir

III) $$(n+1)^p - n^p = P_p.$$

Dann besteht die Identität

3) $$P_p = Q_{p-1} + \tau P_{p-2}, \text{ falls}$$

IV) $$Q_p = (n+1)^p + n^p$$

gesetzt wird, und zugleich ist

4) $$Q_p = \sigma Q_{p-1} - \tau Q_{p-2}; \; \sigma = 2n+1.$$

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} Q_p &= \sigma Q_{p-1} - \tau Q_{p-2} \\ \sigma Q_{p-1} &= \sigma^2 Q_{p-2} - \tau\sigma Q_{p-3} \\ \sigma^2 Q_{p-2} &= \sigma^3 Q_{p-3} - \tau\sigma^2 Q_{p-4} \\ \sigma^{p-2} Q_2 &= \sigma^{p-1} Q_1 - \tau\sigma^{p-2} Q_0, \end{aligned}$$

wobei nach IV) $Q_0 = 2$, $Q_1 = \sigma$ findet man

5) $$Q_p = \sigma^{p-1} Q_1 - \tau \{Q_{p-2} + \sigma Q_{p-3} + \cdots + 2\sigma^{p-2}\}.$$

Aus den für ein gerades p zu benutzenden Gleichungen

$$\begin{aligned} P_p &= Q_{p-1} + \tau P_{p-2} \\ \tau P_{p-2} &= \tau Q_{p-3} + \tau^2 P_{p-4} \\ \tau^2 P_{p-4} &= \tau^2 Q_{p-5} + \tau^3 P_{p-6} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \tau^{\frac{p-2}{2}} P_2 &= \tau^{\frac{p-2}{2}} Q_1 + \tau^{\frac{p}{2}} P_0, \text{ wo } P_0 = 0 \end{aligned}$$

findet man

6) $$P_p = Q_{p-1} + \tau M,$$

oder, wenn man aus 5) den Ausdruck für Q_{p-1} einsetzt,

V) $$P_p = \sigma^{p-1} + \tau N,$$

wobei M und N ganzzahlige Werte besitzen. Setzt man diese Ausdrücke für die P_p in 2) ein, so bleibt als einziges Glied rechts, welches den Faktor τ^2 nicht enthält

7) $$\tau\left\{\binom{h}{2} 2S^2\sigma^{h-4} + \binom{h}{4} 2S^4\sigma^{h-6} + \cdots + \binom{h}{3} 2S^{h-3}\sigma\right\}.$$

Nun ist aber

$$\sigma^q = (2n+1)^q = (2n+1)^2 (2n+1)^{q-2}$$
$$= 4n(n+1)\sigma^{q-2} + \sigma^{q-2},$$

demnach schließlich bei ungeradem q

8) $$\sigma^q = 4\tau M_1 + \sigma.$$

Setzt man dies in 7) ein, so handelt es sich noch um den Ausdruck

$$2\left\{\binom{h}{2} S^2 + \binom{h}{4} S^4 + \cdots + \binom{h}{3} S^{h-3}\right\}\sigma\tau.$$

Aus der Gleichung 1) des § 5

$$(n+1)((n+1)^{h-1}-1) = \binom{h}{1} S^{h-1} + \binom{h}{2} S^{h-2} + \cdots$$
$$+ \binom{h}{2} S^2 + \binom{h}{1} S^1,$$

deren linke Seite den Faktor τ hat, entnimmt man aber bei ungeradem h, daß

$$2\left\{\binom{h}{2} S^2 + \binom{h}{4} S^4 + \cdots + \binom{h}{3} S^{h-3}\right\},$$

welches nur Summen von geradem Index enthält, gleich

$$\tau N_1 - 2\left\{\binom{h}{1} S^1 + \binom{h}{3} S^3 + \cdots + \binom{h}{2} S^{h-2}\right\} - 2\binom{h}{1} S^{h-1}$$

ist, wo nun das letzte Glied geraden Index hat. Nach § 1 haben aber alle Glieder hier bis auf dieses den Faktor τ. Sonach folgt

$$4S^h = \tau^2 R + 2\sigma\binom{h}{1} S^{h-1}.$$

Es besteht demgemäß bei ungeradem h die Kongruenz

$$4(2^{h-1}-1)S^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2(n+1)^2,\ \text{bei } h \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

Ist h eine Primzahl, so kann h in dem Faktor $2^{h-1}-1$ selbst als unwesentlich fortgelassen werden. Man hat z. B.

$$4 \cdot 3 \cdot S^5 \equiv 0; \text{ mod. } n^2(n+1)^2,$$

was auch mit der wirklichen Ausrechnung übereinstimmt.

Indessen darf man auch hier nicht durchgehend volle Übereinstimmung mit der unmittelbaren Ausrechnung erwarten. Denn es ist nicht ausgeschlossen, daß einzelne in $2^{h-1}-1$ enthaltene Faktoren bei speziellen Werten von h nach beiderseits gehoben werden können. Dies ist bereits für $h=7$ der Fall, wo unsere Untersuchung den Faktor 3 einmal zu oft enthält. Andererseits liefert aber auch die wirkliche Ausrechnung

$$S^7 = \frac{n^2(n+1)^2}{24}(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

mit dem überzähligen Nenner 2, der für jedes n aus dem eingeklammerten Teile entfernt werden kann.

Man kann die vorhin geführte Untersuchung durch eine andere Analyse bestätigen, welche allerdings mehrere Unterfälle zu unterscheiden hat, dafür aber auch das Resultat noch etwas präziser faßt.

1. Ist zunächst n eine gerade Zahl $2k$, so schreibe man

$$S^h = ((2k-1)^h + 1^h) + ((2k-2)^h + 2^h) + \cdots + ((k+1)^h + (k-1)^h) + k^h + (2k)^h.$$

Jedes der eingeklammerten $k-1$ Paare ist durch $2k$ teilbar. Setzt man diesen Faktor durch Division überall heraus, so folgt

$$\begin{aligned} S^h &= 2k\{(2k-1)^{h-1} - (2k-1)^{h-2} + \cdots - (2k-1) + 1\} \\ &+ 2k\{(2k-2)^{h-1} - (2k-2)^{h-2}2 + \cdots - (2k-2)2^{h-2} + 2^{h-1}\} \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ 2k\{(2k-(k-1))^{h-1} - (2k-(k-1))^{h-2}(k-1) + \cdots \\ &- (2k-(k-1))^1(k-1)^{h-2} + (k-1)^{h-1}\} + k^h + (2k)^h. \end{aligned}$$

Wird nun jede der Potenzen ausgeführt, so ergibt sich[1])

$$S^h = 2k\{2kQ + hS_{k-1}^{h-1}\} + k^h + (2k)^k.$$

Wird mit $4(2^{h-1}-1)$ multipliziert, so folgt, da S_{k-1}^{h-1} dann nach § 5 den Faktor $2k$ wegen des geraden Index $h-1$ enthält,

[1]) Unter Q, Q_1, Q_2 usw. werden hier immer ganze Zahlen verstanden.

$$4(2^{h-1}-1)S^h = 4k^2 Q(2^{h-1}-1) + (2k)^2 gh = 4k^h(2^{h-1}-1) + 4k^2\cdot 2\cdot(2k)^{h-2}(2^{h-1}-1)$$

oder

A) $\quad 4(2^{h-1}-1)S^h \equiv 0;$ mod. n^2 für $n \equiv 0;$ mod. 2.

Ist h eine Primzahl, so kann man noch durch h dividieren; es ist aber nicht ausgeschlossen, daß auch die ganze Zahl g noch Faktoren mit $2^{h-1}-1$ gemein hat (vgl. die vorhin gemachte Bemerkung).

2. Um auch die Kongruenz nach dem Modul $(n+1)^2$ nachzuweisen, setze man

$$S^h = ((2k)^h + 1^h) + ((2k-1)^h + 2^h) + \cdots ((2k-(k-1))^h + k^h).$$

Man hat jetzt wieder k Paare, von denen jedes durch $2k+1 = n+1$ teilbar ist. Ordnet man sie in der folgenden Gestalt

$$S^h = ((2k+1-1)^h + 1^h) + ((2k+1-2)^h + 2^h) + \cdots + ((2k+1-k)^h + k^h),$$

so erhält man auf dieselbe Weise wie bei 1)

$$S^h = (2k+1)\{(2k+1)Q_1 + hS_k^{h-1}\}.$$

Da jetzt $(2^{h-1}-1)S_k^{h-1} = (2k+1)g$ nach § 3, so ergibt sich

B) $\quad (2^{h-1}-1)S^n \equiv 0;$ mod. $(n+1)^2$; für $n \equiv 0;$ mod. 2.

3. Ist dagegen n ungerade gleich $2k+1$, so gruppiere man zunächst so:

$$S^h = ((2k)^h + 1^h) + ((2k-1)^h + 2^h) + \cdots + ((k+1)^h + k^h) + (2k+1)^h$$

und schreibe die ersten k Paare folgendermaßen

$$((2k+1-1)^h + 1^h) + ((2k+1-1-2)^h + 2^h) + \cdots + ((2k+1-k)^h + k^h).$$

Nun wird

$$S^h = (2k+1)\{2k+1-1)^{h-1} - (2k+1-1)^{h-2} + \cdots - (2k+1-1) + 1\} + (2k+1)\{(2k+1-2)^{h-1} - (2k+1-2)^{h-2}2 + \cdots - (2k+1-2)2^{h-2} + 2^{h-1}\} + \cdots + (2k+1)\{(2k+1-k)^{h-1} - (2k+1-k)^{h-2}k + \cdots - (2k+1-k)k^{h-2} + k^{h-1}\} + (2k+1)^h$$

und hieraus folgt

$$(2^{h-1}-1)S^h = (2k+1)^2(2^{h-1}-1)Q + (2k+1)^2 hg + (2k+1)^h(2^{h-1}-1)$$

oder

C) $$(2^{h-1}-1)S^h \equiv 0; \text{ mod. } n^2 \text{ für } n \equiv 1; \text{ mod. } 2.$$

Zum Nachweis für die Kongruenz nach dem Modul $(n+1)^2$ setze man endlich

$$S = ((2k+1)^h + 1^h) + ((2k)^h + 2^h) + \cdots ((k+2)^h + k^h) + (k+1)^h$$

und ordne die ersten k Paare, so daß

$$S^h = ((2k+2-1)^h + 1^h) + ((2k+2-2)^h + 2^h) + \cdots + ((2k+2-k)^h + k^h) + (k+1)^h.$$

Man erhält dann

$$S^h = (2k+2)\{(2k+2)Q + hS_k^{h-1}\} + (k+1)^h$$

oder

$$4S^h(2^{h-1}-1) = 4(2k+2)^2 Q(2^{h-1}-1) + hq(2k+2)^2 2 + (2k+2)^2(k+1)^{h-2},$$

also endlich

D) $$4S^h(2^{h-1}-1) \equiv 0; \text{ mod. } (n+1)^2 \text{ für } n \equiv 1; \text{ mod. } 2.$$

Durch die 4 Kongruenzen A, B, C, D ist das Auftreten des quadratischen Faktors in jedem einzelnen Falle dargestellt.

§ 7.

Die Summen $\Sigma^h = 1 + 3^h + 5^h + \cdots (2n-1)^h$.

Die Formel III) des § 2 für gerades h

1) $$(2^{h-1})n^h = \binom{h}{1}\Sigma^{h-1} + \binom{h}{3}\Sigma^{h-3} + \cdots + \binom{h}{3}\Sigma^3 + \binom{h}{1}\Sigma^1$$

drückt alle Σ^h von ungeradem Index k durch Σ von niedrigerem ungeradem Index aus. Demnach ist für $h = 2$ $\Sigma^1 = n^2$ und jedes Σ von ungeradem Index wird daher auch den Faktor n^2 enthalten, abgesehen von der jedesmal noch erforderlichen

Division durch h. Es entsteht daher kein übersichtliches Resultat für Σ^h, sondern zunächst nur die Kongruenz

$$A\,\Sigma^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2 \text{ für } h \equiv 1;\ \text{mod. } 2,$$

in der A einen Faktor bedeutet, der, wie man leicht aus der Natur der Binomial-Koeffizienten erkennt, nur eine ungerade Zahl sein kann.

Für ein ungerades h hat man dagegen aus I) des § 3 die Gleichung

$$2)\qquad n((2n)^{h-1}-1) = \binom{h}{1}\Sigma^{h-1} + \binom{h}{3}\Sigma^{h-3} + \cdots + \binom{h}{2}\Sigma^2,$$

welche alle Σ von geradem Index durch ebensolche von niederem Index ausdrückt. Da die linke Seite von der Form

$$n\left((2n)^{\frac{h-1}{2}}-1\right)\left((2n)^{\frac{h-1}{2}}+1\right)$$

stets den Faktor $n(2n-1)(2n+1)$ enthält, folgt für die Σ von geradem Index die Kongruenz

$$B\Sigma^h \equiv 0;\ \text{mod. } n\sigma\sigma_1 \text{ für } h \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

Aus 1) erhält man

$$\begin{array}{lr}
\text{für } h=2 & \Sigma^1 = n^2 \\
\text{„ } h=4 & \Sigma^3 = n^2(2n^2-1) \\
\text{„ } h=6 & 3\,\Sigma^5 = n^2(16n^4-20n^2+7) \\
\text{„ } h=8 & 3\,\Sigma^7 = n^2(48n^6-112n^4+98n^2-31) \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

und ebenso aus 2)

$$\begin{array}{lr}
\text{für } h=3 & 3\,\Sigma^2 = n\sigma\sigma_1 \\
\text{„ } h=5 & 15\,\Sigma^4 = n\sigma\sigma_1(12n^2-7) \\
\text{„ } h=7 & 21\,\Sigma^6 = n\sigma\sigma_1(48n^4-72n^2+31) \\
\text{„ } h=9 & 45\,\Sigma^3 = n\sigma\sigma_1(320n^6-880n^4+916n^2-461) \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

wobei wie früher $\sigma = 2n+1$, $\sigma_1 = 2n-1$ gesetzt ist.

Im folgenden sollen die Faktoren A, B, welche den soeben angeführten Beispielen entsprechen, vollständig angegeben werden.

Zunächst mögen indes einige Bemerkungen Platz finden, die sich auf S und Σ gleichzeitig beziehen. Nach § 3, 4) ist

$$\Sigma^h + (2^h - 1 - (-1)^h) S^h \equiv 0; \text{ mod. } \sigma,$$

also

$$\Sigma^h + 2(2^h - 1) S^h \equiv 0; \text{ mod. } \sigma \text{ für } h \equiv 0; \text{ mod. } 2$$
$$\Sigma^h + 2^h S^h \equiv 0; \text{ mod. } \sigma \text{ für } h \equiv 1; \text{ mod. } 2.$$

Aus der letzten Kongruenz, an deren Stelle man auch schreiben kann

$$\Sigma^h + 2^h S^h = P\sigma^2 + h\sigma S^{h-1}$$

folgt durch Multiplikation mit $2^{h-1} - 1$ aus § 3

$$(2^{h-1} - 1)(2^h S^h + \Sigma^h) = (2^{h-1} - 1) P\sigma^2 + gh\sigma^3,$$

also

3) $$(2^{h-1} - 1)(2^h S^h + \Sigma^h) \equiv 0; \text{ mod. } \sigma^2 \text{ für } h \equiv 1; \text{ mod. } 2.$$

Ist insbesondere h eine Primzahl, so hat man

3a) $$\frac{(2^{h-1} - 1)}{h}(2^h S^h + \Sigma^h) = \sigma^2 Q.$$

In der Tat findet man, falls die vorhin bestimmten Werte der Σ für $h = 3, 5, 7 \ldots$ eingesetzt werden

$$2^3 S^3 + \Sigma^3 = n^2 \sigma^2$$
$$3(2^5 S^5 + \Sigma^5) = n^2 \sigma^2 (2\sigma^2 - 2\sigma - 1)$$
$$3(2^7 S^7 + \Sigma^7) = n^2 \sigma^2 \left(\frac{3\sigma^2 - 1}{2} - 3\sigma^3 + 2\sigma + 1\right).$$

Ich füge dazu einige Sätze, die den Unterschied zwischen dem Verhalten der Summen S und Σ betreffen.

a) Aus der Gleichung § 3, 3)

4) $$\Sigma^h + (2^h - 1) S^h = (n+1)^h + \cdots + (n+n)^h$$

folgt

5) $$\Sigma^h + 2^h (2^{h-1} - 1) S^h \equiv 0; \text{ mod. } n$$

bei jedem h. Ist nun h ungerade, so hat man nach § 1. 1) aus 5)

Ia) $$\Sigma^h \equiv 0; \text{ mod. } n \text{ für } h \equiv 1; \text{ mod. } 2$$

und nach § 5) aus 5)

Ib) $$(2^h - 1)\Sigma^h \equiv 0; \text{ mod. } n \text{ für } h \equiv 0; \text{ mod. } 2.$$

b) Aus der Identität 4) folgt ferner durch Entwicklung nach den Potenzen von $n+1$

6) $$\Sigma^h + 2(2^h - 1) S^h \equiv (-1)^{h+1}; \text{ mod. } n+1$$

bei jedem h. Ist nun h ungerade, mithin $2S^h$ nach § 1, 1) durch $n+1$ teilbar, so hat man

$$\Sigma^h \equiv 1; \text{ mod. } n+1; \; h \equiv 1; \text{ mod. } 2.$$

Bei geradem h wird dagegen

$$(\Sigma^h + 1)(2^h - 1) \equiv 0; \text{ mod. } n+1 \text{ für } h \equiv 0; \text{ mod. } 2.$$

Es ist also Σ^h bei ungeradem h nie durch $n+1$ teilbar; bei geradem h kann Σ^h nur etwa solche Faktoren mit $n+1$ gemein haben, die zugleich in $2^h - 1$ enthalten sind.

c) Für ungerades h ist ferner

$$2^h S^h + \Sigma^h = ((2n-2)^h + 1^h) + ((2n-3)^h + 2^h) + \cdots + (n^h + (n-1)^h) + (2n-1)^h + (2n)^h.$$

Da jedes der $n-1$ eingeklammerten Paare den Faktor $\sigma_1 = 2n-1$ hat, folgt

7) $$2^h S^h + \Sigma^h \equiv +1; \text{ mod. } \sigma_1 \text{ für } h \equiv 1; \text{ mod. } 2.$$

Ist dagegen h gerade, so ist

$$\Sigma^h = \sigma_1^h + (\sigma_1 - 2)^h + (\sigma_1 - 4)^h + \cdots + (\sigma_1 - (2n-4))^h + (\sigma_1 - (2n-2))^h$$

und aus dieser Identität findet man

8) $$2^h S^h - \Sigma^h \equiv 1; \text{ mod. } \sigma_1 \text{ für } h \equiv 0; \text{ mod. } 2.$$

Die beiden Kongruenzen 7) und 8) lassen sich zu

9) $$2^h S^h - (-1)^h \Sigma^h \equiv 1; \text{ mod. } \sigma_1$$

für jedes h zusammenfassen.

Um noch eine weitere Beziehung abzuleiten, setzen wir

$$\Sigma^h + (2^h - 1) S^h = P,$$

wo $$P = (n+1)^h + \cdots + (2n)^h \text{ ist.}$$

Daraus folgt

$$2^h P = (\sigma_1 + 3)^h + (\sigma_1 + 5)^h + \cdots + (\sigma_1 + 2n - 1)^h + 4n^h$$

oder

$$2^h P - \Sigma^h = \sigma_1 Q_1 + (4n)^h - 1 = \sigma_1 Q_2 + 2^h - 1,$$

also

$$(2^h - 1)\Sigma + 2^h(2^h - 1)S^h - (2^h - 1) \equiv 0; \text{ mod. } \sigma_1$$

oder

10) $$(2^h - 1)(\Sigma^h + 2^h S^h - 1) \equiv 0; \text{ mod. } \sigma_1$$

bei jedem h.

Aus 9) und 10) ergibt sich jetzt bei geradem h

$$(2^h - 1)(2^h S^h - \Sigma^h - 1) \equiv 0; \text{ mod. } \sigma_1$$
$$(2^h - 1)(2^h S^h + \Sigma^h - 1) \equiv 0; \text{ mod. } \sigma_1,$$

also durch Addition

11) $$(2^h S^h - 1)(2^h - 1) \equiv 0; \text{ mod. } \sigma_1 \text{ für } h \equiv 0; \text{ mod. } 2$$

und durch Subtraktion

II) $$(2^h - 1)\Sigma^h \equiv 0; \text{ mod. } \sigma_1 \text{ für } h \equiv 0; \text{ mod. } 2.$$

Ist dagegen h ungerade, so wird durch 10) nur die Kongruenz 9) wiederholt. In Verbindung mit der Gleichung 9) lehrt die Gleichung 11), daß bei geradem h S^h nur solche Faktoren mit σ_1 gemein haben kann, die auch in $2^h - 1$ enthalten sind.

Durch diese Betrachtungen sind sowohl die hauptsächlichsten Eigenschaften, welche Σ und S gemein haben, als auch diejenigen, in denen sie voneinander abweichen, dargestellt.

Wir kehren jetzt zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück, bei ungeradem h die Kongruenz $A\Sigma^h \equiv 0$; mod. n^2, bei geradem h die Kongruenz $B\Sigma^h \equiv 0$; mod. $n\sigma\sigma_1$ zu erweisen. Für den modul σ_1 ist sie übrigens schon durch II), für n durch Ib) erledigt.

Es sei nun zunächst h ungerade und n eine gerade Zahl $2k$. Dann hat Σ^h eine gerade Anzahl von Gliedern. Nimmt man das erste und letzte Glied, das zweite und das vorletzte usw. zusammen, so hat man

$$\Sigma^h = ((4k-1)^h + 1^h) + ((4k-3)^h + 3^h) + \cdots$$
$$+ (2k+1)^h + (2k-1)^h$$

und die rechte Seite ist auch gleich

$$((4k-1)^h + 1^h) + ((4k-3)^h + 3^h) + \cdots$$
$$+ ((4k-(2k-1))^h + (2k-1)^h).$$

Da jedes dieser k Paare wegen des ungeraden h den Faktor $4k$ enthält, wird also

$$\begin{aligned}\Sigma^h = {} & 4k\{(4k-1)^{h-1} - (4k-1)^{h-2}\,1 + \cdots + 1\} \\ & + 4k\{(4k-3)^{h-1} - (4k-3)^{h-2}\,3 + \cdots + 3^{h-1}\} \\ & + 4k\{(4k-5)^{h-1} - (4k-5)^{h-2}\,5 + \cdots + 5^{h-1}\} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + 4k\{(4k-(2k-1))^{h-1} - (4k-(2k-1))^{h-2}(2k-1) \\ & \cdots + (2k-1)^{h-1}\}.\end{aligned}$$

Führt man jede der hier auftretenden Potenzen nach dem binomischen Satze aus und beachtet, daß $h-1$, $h-2$, $h-3$ ... abwechselnd gerade und ungerade sind, so entsteht bei ungeradem h und geradem n die Gleichung

$$\Sigma_n^h = 4k(4kQ_1 + h\Sigma_k^{h-1}, \text{ für } h \equiv 1,\ n \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

Da nun nach der in diesem § bewiesenen Kongruenz

$$(2^{h-1} - 1)\Sigma_k^{h-1}$$

bereits den Faktor k enthält, so folgt

$$(2^{h-1} - 1)\Sigma_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2 \text{ für } n \equiv 0,\ h \equiv 1;\ \text{mod. } 2$$

und insbesondere, wenn h eine Primzahl

III a) $$\frac{2^{h-1} - 1}{h}\Sigma_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2.$$

2. Ist dagegen n eine ungerade Zahl $2k+1$, so bleibt bei analoger Anordnung in Paare, wie bei 1), ein Mittelglied $(2k+1)^h$ übrig, während die übrigen sich zu Paaren zusammenfügen lassen. Denn dem Glied $(2k+1)^h$ geht vorher $(2k-1)^h$, und es folgt $(2k+3)^h$. Es ist aber

$$2k + 3 = 4k + 2 - (2k-1).$$

Man erhält also zunächst:

$$\Sigma_n^h = ((4k+1^h)+1^h)+((4k-1)^h+3^h)+\cdots+((4k-(2k-3))^h$$
$$+(2k-1)^h)+(2k+1)^h$$

und kann die rechte Seite auch folgendermaßen schreiben:

$$((4k+2-1)^h+1^h)+((4k+2-3)^h+3^h)+\cdots$$
$$+[((4k+2-(2k-1))^h+(2k-1)^h)]+(2k+1)^h.$$

Demnach wird

$$\Sigma_n^h = 2\cdot(2k+1)\{(4k+2-1)^{h-1}-(4k+2-1)^{h-1}+\cdots+1\}$$
$$+2(2k+1)\{(4k+2-3)^{h-1}-(4k+2-3)^{h-1}3+\cdots+3^{h-1}\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+2(2k+1)\{(4k+2-(2k-1))^{h-1}-(4k+2$$
$$-(2k-1))^{h-1}(2k-1)+\cdots+(2k-1)^{h-1}\}+(2k+1)^h$$

oder

$$\Sigma_n^h = 2(2k+1)(2\cdot(2k+1)P+h\,\Sigma_k^{h-1})+(2k+1)^h.$$

Multipliziert man jetzt mit $2^{h-1}-1$ und benutzt die in § 3 nachgewiesene Kongruenz

$$(2^{h-1}-1)\,\Sigma_k^{h-1}\equiv 0;\ \text{mod.}\ \sigma = 2k+1,$$

so erhält man

III b) $(2^{h-1}-1)\,\Sigma_n^h \equiv 0$; mod. n^2 für $n\equiv 1$, $h\equiv 1$; mod. 2,

so daß nunmehr die Gleichung

IV) $$(2^{h-1}-1)\,\Sigma_n^h \equiv 0;\ \text{mod.}\ n^2$$

für jedes ungerade h besteht.

Die Kongruenzen I b), II), IV) enthalten die sämtlichen Eigenschaften, welche am Eingange dieses § von den Summen Σ behauptet sind, wenn man noch die aus § 3, I) und II) folgende

$$(2^h-1)\,\Sigma^h\equiv 0;\ \text{mod.}\ \sigma\ \text{für}\ h\equiv 0;\ \text{mod.}\ 2$$

hinzu nimmt.

Die unter 3 a) erwiesene Kongruenz läßt sich jetzt noch erweitern. Da nämlich

$$4\,(2^{h-1}-1)\,S^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2 \text{ für } h\equiv 1;\ \text{mod. } 2$$
$$(2^{h-1}-1)\,\Sigma^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2 \text{ für } h\equiv 1;\ \text{mod. } 2$$

ergibt sich für ungerades h

$$(2^{h-1}-1)\,(2^h S^h + \Sigma^h) \equiv 0;\ \text{mod. } n^2\sigma^2,$$

was nach den früher angeführten Beispielen (S. 176) zu vermuten war.

§ 8.

Die Summen $\Omega_n^h = \sum_1^n (-1)^{n+1} n^h$.

Diese Summen besitzen weit einfachere Eigenschaften, wie die in den vorhergehenden §§ betrachteten S und Σ. Setzt man

$$1)\quad \Omega_n^h = 1 - 2^h + 3^h - 4^h + \cdots + (-1)^n (n-1)^h + (-1)^{n+1} n^h,$$

so erhält man sofort die folgende Identität

$$2)\quad (n+1)^h + (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}\left\{2\,\Omega_n^h + \binom{h}{1}\Omega_n^{h-1} + \cdots + \binom{h}{1}\Omega_n^1 + \Omega_n^0\right\},$$

in der bei geradem n das Symbol Ω_n^0 gleich Null, bei ungeradem n gleich Eins zu setzen ist. Die Gleichung 2) ergibt sich, wenn man die Identitäten

$$(n+1)^h + n^h = 2\,n^h + \binom{h}{1} n^{h-1} + \cdots + \binom{h}{1} n + 1$$

in geeigneter Weise für $n = 1, 2 \ldots n$ durch Plus- und Minus-Zeichen vereinigt. Man erhält so

bei ungeradem n

$$\text{I)}\qquad (n+1)^h = 2\,\Omega_n^h + \binom{h}{1}\Omega_n^{h-1} + \cdots + \binom{h}{1}\Omega_n^1,$$

und bei geradem n

$$\text{II)}\qquad (n+1)^h - 1 = -\left\{2\,\Omega_n^h + \binom{h}{1}\Omega_n^{h-1} + \cdots + \binom{h}{1}\Omega_n^1\right\}.$$

Bei ungeradem n tritt also — wenigstens abgesehen von einem Divisor 2^μ — in jedem Ω^n der Faktor $n+1$ auf,

bei geradem n ebenso der Faktor n. Berechnet man aus I) und II) die Werte der Ω für $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, so erhält man

bei geradem n

$$-2\,\Omega_n^1 = n$$
$$-2\,\Omega_n^2 = n(n+1)$$
$$-4\,\Omega_n^3 = n^2(2n+3)$$
$$-2\,\Omega_n^4 = n(n+1)(n^2+n-1)$$
$$-4\,\Omega_n^5 = n^2(2n^3+5n^2-5)$$
$$-2\,\Omega_n^6 = n(n+1)(n^4+2n^3-2n^2-3n+3),$$

und bei ungeradem n

$$2\,\Omega_n^1 = n+1$$
$$2\,\Omega_n^2 = n(n+1)$$
$$4\,\Omega_n^3 = (n+1)^2(2n-1)$$
$$2\,\Omega_n^4 = n(n+1)(n^2+n-1)$$
$$4\,\Omega_n^5 = (n+1)^2(2n^3+n^2-4n+2)$$
$$2\,\Omega_n^6 = n(n+1)(n^4+2n^3+n^2-2n+9).$$

Aus diesen Angaben erhellt, daß die folgenden Kongruenzen zu vermuten sind.

1) $2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n$
für $n \equiv 0;\ \text{mod. } 2$ bei jedem h
für $n \equiv 1;\ \text{mod. } 2$ für $h \equiv 0;\ \text{mod. } 2$.

A) 2) $2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n+1$
für $n \equiv 1$ bei jedem h
für $n \equiv 0$ bei $h \equiv 0;\ \text{mod. } 2$.

3) $4\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n^2$ bei $n \equiv 0,\ h \equiv 0;\ \text{mod. } 2$.

4) $4\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } (n+1)^2$ bei $n \equiv 1,\ h \equiv 1;\ \text{mod. } 2$.

Diese Gesetzmäßigkeit läßt sich indessen nicht durch die wirkliche Ausrechnung oder durch eine an sie angeschlossene vollständige Induktion bestätigen, da sie auf der besonderen Zusammenwirkung der bei den Ω sukzessiv auftretenden Zahlenkoeffizienten beruht. Um sie allgemein nachzuweisen, schlagen wir folgenden Weg ein.

Setzt man bei geradem n

$$\Omega_n^h = (n-(n-1))^h - (n-(n-2))^h + \cdots + (n-1)^h - n^h,$$

so ergibt sich die Identität

$$\text{I a)}\quad \begin{aligned} \Omega_n^h &= (-1)^{n+1} n^h + (-1)^{n+1}\binom{h}{1} n^{h-1}\Omega_n^1 + (-1)^{n+2}\binom{h}{2} n^{h-2}\Omega_n^2 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+h-1}\binom{h}{1} n\,\Omega_n^{h-1} + (-1)^{n+h}\Omega_n^h. \end{aligned}$$

Bei ungeradem n aber folgt analog

$$\text{I b)}\quad \begin{aligned} \Omega_n^h &= 0\cdot n^h + (-1)^{n+1}\binom{h}{1} n^{h-1}\Omega_n^1 + (-1)^{n+2}\binom{h}{2} n^{h-2}\Omega_n^2 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+h-1}\binom{h}{1} n\,\Omega_n^{h-1} + (-1)^{n+h}\Omega_n^h \end{aligned}$$

und man kann I a) und I b) mittels des Symbols Ω_0, welches für gerades n gleich -1, für ungerades n gleich Null zu setzen ist, in die folgende Gleichung zusammenfassen:

$$\text{III)}\quad \begin{aligned} \Omega_n^h(1-(-1)^{n+h}) &= n^h\Omega_0 + (-1)^{n+1}\binom{h}{1} n^{h-1}\Omega_n^1 \\ &\quad + (-1)^{n+2}\binom{h}{2} n^{h-2}\Omega_n^2 + \cdots + (-1)^{n+h-1}\binom{h}{1} n\,\Omega_n^{h-1}. \end{aligned}$$

Setzt man ferner $n+1=\tau$, so ergibt sich auf dieselbe Weise bei geradem n

$$\text{II a)}\quad \begin{aligned} \Omega_n^h &= (-1)^{n+2}\binom{h}{1}\tau^{h-1}\Omega_n^1 + (-1)^{n+3}\binom{h}{2}\tau^{h-2}\Omega_n^2 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+h}\binom{h}{1}\tau\,\Omega_n^{h-1} + (-1)^{n+h+1}\Omega_n^h \end{aligned}$$

und bei ungeradem n

$$\text{II b)}\quad \begin{aligned} \Omega_n^h &= \Omega_0^1\tau^h + (-1)^{n+2}\binom{h}{1}\tau^{h-1}\Omega_n^1 + (-1)^{n+3}\binom{h}{2}\tau^{h-2}\Omega_n^2 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+h}\binom{h}{1}\tau\,\Omega_n^{h-1} + (-1)^{n+h+1}\Omega_n^h \end{aligned}$$

und die Gleichungen II a) und II b) können mittels des Symbols Ω_0^1, welches bei geradem n gleich Null, bei ungeradem n gleich Eins zu setzen ist, zu der folgenden Gleichung vereinigt werden:

$$\text{IV)}\quad \begin{aligned} \Omega_n^h(1-(-1))^{n+h+1} &= \tau^h\,\Omega_0^1 + (-1)^{n+2}\binom{h}{1}\tau\,\Omega_n^1 + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n+h}\binom{h}{1}\tau\,\Omega_n^{h-1}. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung III) folgt bei geradem h und ungeradem n

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n \text{ für } h \equiv 0,\ n \equiv 1;\ \text{mod. } 2$$

und bei ungeradem h und geradem n

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n \text{ für } h \equiv 1,\ n \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

Ebenso folgt aus IV) bei geradem h und geradem n

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n+1 \text{ für } h \equiv 0,\ n \equiv 0;\ \text{mod. } 2$$

und endlich bei ungeradem h und ungeradem n

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n+1 \text{ für } h \equiv 1,\ n \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

Diese Kongruenzen lassen sich bei ungeradem h auch direkt erweisen.

1. Es ist nämlich bei geradem $n = 2k$ und ungeradem h

$$\Omega_n^h = 1 - 2^h + 3^h + \cdots + (2k-1)^h - (2k)^h$$

in die folgenden Paare zerlegbar

$$\begin{aligned} \Omega_n^h &= ((2k-1)^h + 1^h) - ((2k-2)^h + 2^h) + \cdots \\ &+ (-1)^k((2k-(k-1))^h + (k-1)^h) - (k^h(-1)^k + (2k)^h). \end{aligned}$$

Da jedes der $k-1$ eingeklammerten Paare den Faktor $2k$ hat, erhält man in der Tat

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n \text{ für } n \equiv 0,\ h \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

2. Ist dagegen $n = 2k+1$ und h ungerade, so zerlegt man Ω_n^h in der folgenden Weise

$$\begin{aligned} \Omega_n^h &= ((2k+2-1)^h + 1^h) - ((2k+2-2)^h + 2^h) + \cdots \\ &+ (-1)^{k-1}((2k+2-k)^h + k^h) + (-1)^k(k+1)^h, \end{aligned}$$

so daß jetzt

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n+1 \text{ für } n \equiv 1,\ h \equiv 1;\ \text{mod. } 2 \text{ wird.}$$

Aber diese einfachen Mittel reichen nicht aus, um

a) bei geradem h und geradem n die Kongruenz

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n;$$

b) bei geradem h und ungeradem n die Kongruenz

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n+1$$

nachzuweisen.

Setzt man bei a)

$$\Omega_n^h = 1 - 2^h + 3^h + \cdots + (2k-1)^h - (2k)^h,$$

so ist

$$\Omega_n^h = \Sigma_k^h - 2^h S_k^h$$
$$S_n^h = \Sigma_k^h + 2^h S_k^h.$$

Aus der Gleichung

$$\Omega_n^h + S_n^h = 2\,\Sigma_k^h$$

folgt $$2\cdot(2^h-1)\,\Omega_n^h + 2\,(2^h-1)\,S_n^h = 4\,\Sigma_k^h\,(2^h-1)$$

und hieraus ergibt sich nach der § 7, Ib) bewiesenen Kongruenz $(2^h-1)\,\Sigma^h \equiv 0$, mod. n für $h \equiv 0$; mod. 2, daß

V) $2\cdot(2^h-1)\,\Omega_n^h \equiv 0;$ mod. n für $n \equiv 0,\ h \equiv 0;$ mod. 2

sein muß. Der Faktor 2^h-1 aber kann hier fortgelassen werden, da, wie eingangs dieses § bemerkt wurde, bei Ω_n^h nur eine Potenz von 2 in Betracht kommen kann.

Setzt man ähnlich bei b) $n = 2k+1$, so ist

$$\Omega_n^h = 1 - 2^h + 3^h + \cdots + (2k-1)^h - (2k)^h + (2k+1)^h,$$

also

$$\Omega_n^h = \Sigma_{k+1}^h - 2^h S_k^h$$
$$S_n^h = \Sigma_{k+1}^h + 2^h S_k^h,$$

oder

$$\Omega_n^h + S_n^h = 2\,\Sigma_{k+1}^h.$$

Hieraus folgt zunächst nach § 7, 5) bei ungeradem h, wo demnach $\Sigma_{k+1}^h \equiv 0;$ mod. $k+1$ ist, die bereits vorhin erwiesene Kongruenz

$$2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod. } n+1 \text{ für } n \equiv 1,\ h \equiv 1;\ \text{mod. } 2$$

dagegen nach Multiplikation mit $2\,(2^h-1)$ bei geradem h

$$2 \cdot (2^h - 1)\,\Omega_n^h + 2 \cdot (2^h - 1)\,S_n^h = 4\,(2^h - 1)\,\Sigma_{k+1}^h$$

oder

VI) $\quad 2\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod.}\ n+1$ für $n \equiv 1,\ h \equiv 0;\ \text{mod.}\ 2.$

Jetzt betrachte man endlich die Gleichung III) bei geradem n und ungeradem h. Dann folgt

$$2\,\Omega_n^h \equiv n h\,\Omega_n^{h-1};\ \text{mod.}\ n^2.$$

Da aber $h-1$ gerade und n gerade sind, folgt aus der Anwendung von V) auf die rechte Seite

$$4\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod.}\ n^2 \text{ für } h \equiv 1,\ n \equiv 0;\ \text{mod.}\ 2.$$

Und ebenso erhält man aus IV) für ungerades h und ungerades n

$$2\,\Omega_n^h \equiv \tau h\,\Omega_n^{h-1};\ \text{mod.}\ \tau^2.$$

Da jetzt nach VI) auf der rechten Seite $2\,\Omega_n^{h-1}$ bereits den Faktor τ enthält, bleibt

$$4\,\Omega_n^h \equiv 0;\ \text{mod.}\ \tau^2 \text{ für } n \equiv 1,\ h \equiv 1;\ \text{mod.}\ 2.$$

Hiermit sind aber alle Kongruenzen in der Tabelle A erwiesen.

§ 9.

Die Summen $\Delta_n^h = 1 - 3^h + 5^h - \cdots + (2n-1)^h(-1)^{n+1}$.

Es sollen hier endlich noch die Summen Δ_n^h untersucht werden. Dabei wird sich zugleich ergeben, wie die analogen Betrachtungen weiter fortgesetzt werden können.

Wir entwickeln zunächst Gleichungen zur rekurrenten Berechnung der Δ^h.

Setzt man $\sigma_1 = 2n - 1$, so wird

$$(\sigma_1 + 1)^h + (\sigma_1 - 1)^h = 2\left(\sigma_1^h + \binom{h}{2}\sigma_1^{h-2} + \cdots\right.$$
$$\left. + (1 + (-1)^{h-1})\binom{h}{1}\sigma_1 + (1 + (-1)^h \sigma_1^0\right).$$

Aus dieser Identität folgt durch geeignete Zusammenfassung mit dem Plus- und Minus-Zeichen für $n = 1, 2, \ldots$

1) $$2^{h-1} n^h = -\left(\Delta_n^h + \binom{h}{2} \Delta_n^{h-2} + \cdots + \binom{h}{2} \Delta_n^2\right) \text{ für } n \equiv 0,$$
$$h \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

2) $$2^{h-1} n^h - 1 = \Delta_n^h + \binom{h}{2} \Delta_n^{h-2} + \cdots + \binom{h}{2} \Delta_n^2 \text{ für } n \equiv 1,$$
$$h \equiv 0;\ \text{mod. } 2.$$

3) $$2^{h-1} n^h = -\left(\Delta_n^h + \binom{h}{2} \Delta_n^{h-2} + \cdots + \binom{h}{1} \Delta_n^1\right) \text{ für } n \equiv 0,$$
$$h \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

4) $$2^{h-1} n^h = \left(\Delta_n^h + \binom{h}{2} \Delta_n^{h-2} + \cdots + \binom{h}{1} \Delta_n^1\right) \text{ für } n \equiv 1,$$
$$h \equiv 1;\ \text{mod. } 2.$$

Diese Gleichungen sind wieder einfacher wie die des § 8, weil das Δ vom höchsten Index sich unmittelbar als ganzzahliger Ausdruck der Δ von niederem Index ergibt.

Die Summen Δ^h stehen mit den Summen Ω^h in einfacher Beziehung. Man hat nämlich für $\sigma = 2n + 1$

$$\begin{aligned} 2^h \Omega_n^h &= 2^h - 4^h + 6^h - \cdots (-1)^n (2n-2)^h + (-1)^{n+1} (2n)^h \\ &= (\sigma - (2n-1))^h - (\sigma - (2n-3))^h + \cdots (-1)^h (\sigma - 3)^h \\ &\quad + (-1)^{n+1} (\sigma - 1)^h. \end{aligned}$$

Entwickelt man nach den Potenzen von σ, so erhält man bei geradem n

$$\begin{aligned} 2^h \Omega_n^h &= \sigma^h 0 + \binom{h}{1} \sigma^{h-1} \Delta_n^1 - \binom{h}{2} \sigma^{h-2} \Delta_n^2 + \cdots + (-1)^h \binom{h}{1} \sigma \Delta_n^{h-1} \\ \text{I)} \qquad &+ (-1)^{h+1} \Delta_n^h;\ n \equiv 0;\ \text{mod. } 2; \end{aligned}$$

bei ungeradem n

$$\begin{aligned} 2^h \Omega_n^h &= \sigma^h - \binom{h}{1} \sigma^{h-1} \Delta_n^1 + \binom{h}{2} \sigma^{h-2} \Delta_n^2 + \cdots + (-1)^{h-1} \binom{h}{1} \sigma \Delta_n^{h-1} \\ \text{II)} \qquad &+ (-1)^n \Delta_n^h;\ n \equiv 1;\ \text{mod. } 2. \end{aligned}$$

Ferner findet man für $\sigma_1 = 2n - 1$ aus

$$\Delta_n^h = (\sigma_1 - 2(n-1))^h - (\sigma_1 - 2(n-2))^h + \cdots - (\sigma_1 - 2)^h + \sigma_1^h$$

bei ungeradem n

$$\Delta_n^h = 2\binom{h}{1}\sigma_1^{h-1}\Omega_n - 2^2\binom{h}{2}\sigma_1^{h-2}\Omega_n^2 + \cdots + (-1)^h 2^{h-2}\binom{h}{1}\sigma_1\Omega_n^{h-1}$$

$$\text{III)}\quad + \cdots + (-1)^{n+1} 2^h \Omega_n^h + (-1)^{h+2};\quad n \equiv 1;\ \text{mod. } 2$$

und endlich bei geradem n

$$\Delta_n^h = -\sigma_1^h - 2\binom{h}{1}\sigma_1^{h-1}\Omega_n^1 + 2^2\binom{h}{2}\sigma_1^{h-2}\Omega_n^2 + \cdots$$

$$\text{IV)}\quad + (-1)^{h-1} 2^{h-1}\binom{h}{1}\sigma_1\Omega_n^{h-1} + (-1)^n 2^h \Omega_n^h + (-1)^h,$$

so daß die Gleichungen IV) die Auflösungen des linearen Systems I), die Gleichungen III) die Auflösungen von II) sind.

Berechnet man aus den Formeln 1, 2, 3, 4 die Δ für die ersten vier Werte von h, so findet man

aus 1) bei geradem h und geradem n

$$-\Delta_n^2 = 2n^2$$
$$-\Delta_n^4 = 4n^2(2n^2 - 3)$$
$$-\Delta_n^6 = n^2(32n^4 - 120n^2 + 150)$$
$$-\Delta_n^8 = 4n^2(32n^6 - 224n^4 + 700n^2 - 847),$$

aus 2) bei geradem h und ungeradem n

$$\Delta_n^2 = 2n^2 - 1$$
$$\Delta_n^4 = 8n^4 - 12n^2 + 5$$
$$\Delta_n^6 = 32n^6 - 120n^4 + 150n^2 - 61$$
$$\Delta_n^8 = 128n^8 - 896n^6 + 2800n^4 - 3016n^2 + 1385,$$

aus 3) bei ungeradem h und geradem n

$$-\Delta_n^1 = n$$
$$-\Delta_n^2 = n(4n^2 - 3)$$
$$-\Delta_n^5 = n(16n^4 - 40n^2 + 25)$$
$$-\Delta_n^7 = n(64n^6 - 336n^4 + 700n^2 - 427),$$

aus 4) endlich bei ungeradem h und ungeradem n dieselben Werte wie bei 3), aber ohne das links stehende Minus-Zeichen. Es ist übrigens unmittelbar zu sehen, daß

$$\Delta_{2k}^{2h} \equiv 0;\ \text{mod.}\ (2k)^2$$
$$\Delta_{2k}^{2k+1} \equiv 0;\ \text{mod.}\ 2k$$

sein muß. Ohne noch weitere, unmittelbar aus I), II) folgende Kongruenzen anzugeben, sei noch die folgende Eigenschaft der Δ hervorgehoben.

Zieht man die Gleichung bei geradem h

$$2^{h-1} - 1 = 1 + \binom{h}{2} + \binom{h}{4} + \cdots + \binom{h}{2}$$

von der Gleichung 2) ab, so bleibt

$$2^{h-1}(n^h - 1) = (\Delta_n^h - 1) + \binom{h}{2}(\Delta_n^{h-2} - 1) + \cdots + \binom{h}{2}(\Delta_n^2 - 1).$$

Da h gerade ist, hat die linke Seite immer den Teiler $n^2 - 1$. Folglich ist

$$\Delta_n^h - 1 \equiv 0;\ \text{mod.}\ n^2 - 1\ \text{ für }\ n \equiv 1,\ h \equiv 0;\ \text{mod.}\ 2.$$

In der Tat ist auch

$$\Delta_n^2 - 1 = 2(n^2 - 1)$$
$$\Delta_n^4 - 1 = 4(n^2 - 1)(2n^2 - 1)$$
$$\Delta_n^6 - 1 = 2(n^2 - 1)(16n^4 - 44n^2 + 31)$$
$$\Delta_n^8 - 1 = 8(n^2 - 1)(16n^6 - 96n^4 + 254n^2 - 173).$$

Zieht man dagegen bei ungeradem h die Gleichung

$$2^{h-1} n = \left(1 + \binom{h}{2} + \binom{h}{4} + \cdots + \binom{h}{1}\right) n$$

von der Gleichung 3) ab, so hat man

$$2^{h-1} n(n^{h-1} - 1) = -\left\{(\Delta_n^h + n) + \binom{h}{2}(\Delta_n^{h-2} + n) + \cdots + \binom{h}{1}(\Delta_n^1 + n)\right\}$$

und hieraus folgt

$$\Delta_n^k + n \equiv 0;\ \text{mod.}\ (n^2 - 1)\ \text{ für }\ h \equiv 1,\ n \equiv 0;\ \text{mod.}\ 2.$$

In der Tat ist auch

$$\Delta_n^3 + n = -4n(n^2-1)$$
$$\Delta_n^5 + n = -8n(n^2-1)(2n^2-3)$$
$$\Delta_n^7 + n = -4n(n^2-1)(16n^4-68n^2+107).$$

Eine analoge Kongruenz gilt endlich auch für den Fall $h \equiv 1$, $n \equiv 1$; mod. 2; man hat dann nämlich

$$\Delta_n^h - n \equiv 0, \text{ mod. } (n^2-1).$$

Für $h \equiv 0$, $n \equiv 0$; mod. 2 findet dagegen kein entsprechender Satz statt.

Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen grosser Zahlen.

Von **Oskar Perron.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 5. Mai 1917.

§ 1.

Laplace hat zur näherungsweisen Berechnung von Integralen der Form

(1) $$\int f(z)\,\varphi(z)^n\,dz$$

für sehr große Werte von n vielfach eine Methode angewandt, die sich folgendermaßen skizzieren läßt. Man braucht nur denjenigen beliebig kleinen Teil des Integrationswegs zu berücksichtigen, der in der Nähe des Maximums von $|\varphi(z)|$ liegt; denn der Rest des Integrationswegs liefert einen infinitär kleineren Beitrag. Wird das Maximum an der Stelle $z = z_0$ erreicht, so setzt man

(2) $$\varphi(z) = \varphi(z_0)\cdot e^{-\alpha t^2},$$

wodurch das Integral (1.) die Form

(3) $$\varphi(z_0)^n \int \chi(t)\, e^{-n\alpha t^2}\,dt$$

annimmt. Sodann entwickelt man $\chi(t)$ nach Potenzen von t, integriert gliedweise und erstreckt nachträglich die Integrationsgrenzen ins Unendliche. Der dadurch fälschlich hinzugekommene Beitrag schadet nichts, da er von kleinerer Größenordnung ist, und man hat jetzt den Vorteil, daß die einzelnen Integrale bekannte Werte haben.

Vielfach ist es bei Anwendung dieser Methode notwendig, zuerst den Integrationsweg in passender Weise abzuändern; offenbar erhält man den günstigsten Näherungswert des Integrals, wenn man den Weg so wählt, daß auf ihm das Maximum von $|\varphi(z)|$ so klein wie möglich wird.

Bei der Laplaceschen Methode ist die Entwicklung der Funktion $\chi(t)$ nach Potenzen von t äußerst beschwerlich, da sie zuvor natürlich die Auflösung der Gleichung (2) nach z erfordert. Allerdings wird es bei Anwendungen meist genügen, ein oder zwei Glieder zu berechnen. Das theoretische Interesse geht aber weiter. Deshalb hat Burkhardt die Laplacesche Methode derart modifiziert,[1]) daß die Auflösung der Gleichung (2) überflüssig wird, und die Überlegenheit seiner Methode an zwei Beispielen dargetan. Die Burkhardtsche Methode führt stets zu dem gleichen Näherungswert wie die Laplacesche, erreicht ihn aber auf wesentlich kürzerem Wege.

Eine ganz andere Frage ist nun die, in welchem Umfang diese Werte wirklich als Näherungswerte des Integrals (1) bezeichnet werden können. Denn die fraglichen Methoden haben bis jetzt eigentlich nur die Bedeutung eines heuristischen Prinzips: Eine strenge Begründung in der nötigen Allgemeinheit ist meines Wissens nie gegeben worden. In der vorliegenden Arbeit werde ich diese Lücke in, wie ich glaube, erschöpfender Weise ausfüllen. Dabei wird auch die Burkhardtsche Methode nochmals in einer die Rechnung vereinfachenden Weise abgeändert. Die Koeffizienten der asymptotischen Reihe, welche man für das Integral (1) erhält, lassen sich nunmehr in ihrem Bildungsgesetz vollständig überblicken, während man bisher über zwei oder höchstens drei Glieder nicht hinauskam.

Zur Vereinfachung der Formeln werde ich annehmen, daß die Stelle z_0, an welcher $|\varphi(z)|$ den maximalen Wert annimmt, der Nullpunkt ist, und daß $\varphi(0) = 1$ ist. Eine Beschränkung

[1]) Über Funktionen großer Zahlen, insbesondere über die näherungsweise Bestimmung entfernter Glieder in den Reihenentwicklungen der Theorie der Keplerschen Bewegung. — Diese Sitzungsberichte, Jahrg. 1914.

der Allgemeinheit bedeutet das offenbar nicht. Der Exponent n, der ins Unendliche wachsen soll, kann nach Belieben auf ganzzahlige Werte beschränkt oder auch stetig wachsend angenommen werden. Unter $\varphi(z)^n$ ist dann $e^{n \log \varphi(z)}$ zu verstehen, wobei mit $\log \varphi(z)$ derjenige Zweig des Logarithmus bezeichnet ist, der für $z = 0$ den Wert 0 hat.

§ 2.

Bevor wir an unsere eigentliche Aufgabe herantreten, müssen wir uns über die Kurven

$$|\varphi(z)| = \text{konst.}$$

und insbesondere über ihre Singularitäten klar werden, wenn $\varphi(z)$ eine in einem gewissen Bereich reguläre Funktion bedeutet.

Sei $\varphi(z)$ an der Stelle z_0 regulär und von Null verschieden. Dann ist $\log \frac{\varphi(z)}{\varphi(z_0)}$ eine Reihe nach Potenzen von $z - z_0$ ohne konstantes Glied. Die Reihe beginne etwa mit der p^{ten} Potenz; also

$$\log \frac{\varphi(z)}{\varphi(z_0)} = (z - z_0)^p [b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots], \; b_0 \neq 0.$$

Setzt man

$$b_\nu = r_\nu e^{i\beta_\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$z - z_0 = v e^{i\omega},$$

so ist $r_0 > 0$, und

$$\log \frac{\varphi(z)}{\varphi(z_0)} = v^p [r_0 e^{i\beta_0 + ip\omega} + r_1 v e^{i\beta_1 + i(p+1)\omega} + r_2 v^2 e^{i\beta_2 + i(p+2)\omega} + \cdots].$$

Nun ist die Gleichung

$$|\varphi(z)| = |\varphi(z_0)|$$

gleichbedeutend mit

$$\Re\left(\log \frac{\varphi(z)}{\varphi(z_0)}\right) = 0,$$

also mit

$$F(v, \omega) \equiv r_0 \cos(\beta_0 + p\,\omega) + r_1 v \cos(\beta_1 + (p+1)\,\omega) \\ + r_2 v^2 \cos(\beta_2 + (p+2)\,\omega) + \cdots = 0.$$

Die Gleichung $F(v, \omega) = 0$ hat für $v = 0$ die $2p$ modulo 2π inkongruenten Lösungen

$$\omega = -\frac{\beta_0}{p} + \frac{2q+1}{2p}\pi \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots 2p-1),$$

die wir mit δ_q bezeichnen wollen. Ferner ist

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_{v=0,\, \omega=\delta_q} = -p\, r_0 \sin\frac{2q+1}{2}\pi \neq 0.$$

Nach einem bekannten Satz über die Existenz impliziter Funktionen hat also die Gleichung $F(v, \omega) = 0$ für kleine Werte von v genau $2p$ inkongruente Lösungen ω; diese sind stetige Funktionen von v und haben für $v \to 0$ die Grenzwerte δ_q. Die Kurve $|\varphi(z)| = |\varphi(z_0)|$ hat somit im Punkt z_0 genau $2p$ Äste, und die Richtungswinkel ihrer Tangenten sind die Werte δ_q. Da unter diesen Werten neben δ_q stets auch $\delta_q + \pi = \delta_{q+p}$ vorkommt, so hat die Kurve einen p-fachen Punkt im gewöhnlichen Sinne.

Die Umgebung des Punktes z_0 wird durch die verschiedenen Äste der Kurve $|\varphi(z)| = |\varphi(z_0)|$ in $2p$ (im allgemeinen krummlinig begrenzte) Sektoren geteilt mit lauter gleichen Zentriwinkeln $\left(= \frac{2\pi}{2p}\right)$. In diesen Sektoren ist abwechselnd $|\varphi(z)| < |\varphi(z_0)|$ und $|\varphi(z)| > |\varphi(z_0)|$, oder was dasselbe sagt, $F(v, \omega) < 0$ und $F(v, \omega) > 0$. In der Tat, für $\delta_q < \omega < \delta_{q+1}$ ist

$$\frac{\pi}{2} + q\pi < \beta_0 + p\,\omega < \frac{\pi}{2} + (q+1)\pi;$$

also

$$\cos(\beta_0 + p\,\omega) \begin{cases} < 0, & \text{wenn } q \text{ gerade} \\ > 0, & \text{wenn } q \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für hinreichend kleine Werte von v ist also auch

$$F(v, \omega) \begin{cases} < 0, & \text{wenn } q \text{ gerade} \\ > 0, & \text{wenn } q \text{ ungerade.} \end{cases}$$

§ 3.

Nunmehr wenden wir uns unserer eigentlichen Aufgabe zu und betrachten zunächst das Integral

$$\Phi_n = \int_0^z z^{\alpha-1} f(z)\, \varphi(z)^n\, dz, \tag{4}$$

wobei $f(z)$, $\varphi(z)$ auf dem ganzen Integrationsweg reguläre Funktionen sind. Ferner sei

$$\varphi(0) = 1, \tag{5}$$

und sonst auf dem ganzen Integrationsweg $|\varphi(z)| < 1$. Hiernach bestehen für hinreichend kleine Werte von $|z|$ Entwicklungen der Form

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \tag{6}$$

$$\log \varphi(z) = z^p (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots), \tag{7}$$

und es ist $b_0 \neq 0$, wenn nur die ganze positive Zahl p richtig gewählt wird. Ferner darf auch $a_0 \neq 0$ angenommen werden, und dann muß, damit das Integral existiert, $\Re(\alpha) > 0$ sein.

Nach § 2 besitzt die Kurve $|\varphi(z)| = 1$ im Nullpunkt einen p-fachen Punkt, und die p Tangenten haben, wenn

$$b_0 = r e^{i\beta}, \tag{8}$$

$$z = v e^{i\omega} \tag{9}$$

gesetzt wird, die Richtungswinkel $\omega = \delta_q$, wo

$$\delta_q = -\frac{\beta}{p} + \frac{2q+1}{2p}\pi$$

ist. Dadurch wird die Umgebung des Nullpunktes in $2p$ Sektoren geteilt, in denen abwechselnd $|\varphi(z)| < 1$ und $|\varphi(z)| > 1$ ist. Und zwar ist für $\delta_q < \omega < \delta_{q+1}$

$$|\varphi(z)| < 1, \text{ wenn } q \text{ gerade,}$$
$$|\varphi(z)| > 1, \text{ wenn } q \text{ ungerade.}$$

Nach unseren Voraussetzungen verläuft der Integrationsweg in einem Sektor der ersten Art; für ihn sei etwa $q = 2l$.

Auf der Winkelhalbierenden dieses Sektors hat ω den Wert $\omega_0 = \frac{1}{2}(\delta_{2l} + \delta_{2l+1})$, oder also

$$(10) \qquad \omega_0 = -\frac{\beta}{p} + \frac{2l+1}{p}\pi.$$

Nunmehr läßt sich der Integrationsweg in (4) folgendermaßen abändern. Man geht zuerst geradlinig auf der Winkelhalbierenden von $z = 0$ bis $z = \varrho e^{i\omega_0}$, wo ϱ eine beliebig kleine positive Zahl ist, sodann auf einem geeigneten Weg W von $z = \varrho e^{i\omega_0}$ nach $z = Z$. Dieser Weg W kann offenbar so gewählt werden, daß auf ihm dauernd $|\varphi(z)| < 1$ ist. Hat also das Maximum von $|\varphi(z)|$ auf W etwa den Wert $1 - \eta$, so ist das Integral über W gleich $O((1-\eta)^n)$, wobei O das Landausche Ordnungssymbol bedeutet.[1]) Daher:

$$(11) \qquad \Phi_n = \int_0^{\varrho e^{i\omega_0}} z^{\alpha-1} f(z)\varphi(z)^n dz + O((1-\eta)^n).$$

Zur Umformung des Integranden müssen wir zunächst eine Zwischenbetrachtung einschalten. Setzt man

$$(12) \qquad \frac{\log\varphi(z) - b_0 z^p}{z^p} = F(z),$$

so ist nach (7)

$$(13) \qquad F(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots,$$

und daher, wenn x eine neue Variable bedeutet,

$$(14) \qquad f(z) e^{xF(z)} = \psi_0(x) + \psi_1(x) z + \psi_2(x) z^2 + \cdots,$$

wobei $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, ... leicht zu berechnende Polynome sind, und zwar $\psi_\nu(x)$ vom (höchstens) ν^{ten} Grad. Setzt man demgemäß

$$(15) \qquad \psi_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\nu} g_{\nu,\mu} x^\mu,$$

---

[1]) Die Zahl η hängt von ϱ ab. Damit η nicht von n abhängt, was für die späteren Schlüsse wesentlich ist, muß also ϱ unabhängig von n gewählt werden. Im übrigen darf aber ϱ beliebig klein sein, und wir behalten uns die geeignete Wahl noch vor.

so ist offenbar $g_{\nu,0} = a_\nu$, und allgemein ist $g_{\nu,\mu}$ der Koeffizient von z^ν in der Entwicklung von

$$\frac{1}{\mu!}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)(b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots)^\mu,$$

so daß die Zahlen $g_{\nu,\mu}$ als vollkommen bekannt gelten können. Die ersten Werte mögen hier noch ausführlich angegeben werden:

$$(16)\quad \begin{cases} g_{0,0} = a_0; \\ g_{1,0} = a_1, \quad g_{1,1} = a_0 b_1; \\ g_{2,0} = a_2, \quad g_{2,1} = a_1 b_1 + a_0 b_2, \quad g_{2,2} = \frac{1}{2} a_0 b_1^2; \\ g_{3,0} = a_3, \quad g_{3,1} = a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3, \quad g_{3,2} = \frac{1}{2}(a_1 b_1^2 \\ \qquad + 2 a_0 b_1 b_2), \quad g_{3,3} = \frac{1}{6} a_0 b_1^3. \end{cases}$$

Für die Reihe (14) werden wir alsbald eine Abschätzung des Restes nötig haben, die wir sogleich vornehmen wollen. Dazu sei σ eine festgewählte positive Zahl, die aber kleiner sein soll als die Konvergenzradien der Reihen (6) und (7). Dann gibt es eine positive Zahl M derart, daß

$$(17)\qquad |a_\nu| \leqq \frac{M}{\sigma^\nu} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(18)\qquad |b_\nu| \leqq \frac{M}{\nu \sigma^\nu} \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

ist, und die Funktion (14) läßt daher die folgende Majorante zu:

$$M\left(1 + \frac{z}{\sigma} + \frac{z^2}{\sigma^2} + \cdots\right) \cdot e^{|x| M \left(\frac{z}{\sigma} + \frac{z^2}{2\sigma^2} + \frac{z^3}{3\sigma^3} + \cdots\right)}$$

$$= \frac{M}{1 - \frac{z}{\sigma}} e^{-|x| M \log\left(1 - \frac{z}{\sigma}\right)} = M\left(1 - \frac{z}{\sigma}\right)^{-1 - M|x|}$$

$$= M \cdot \left(1 + \frac{1 + M|x|}{1} \frac{z}{\sigma} + \frac{(1 + M|x|)(2 + M|x|)}{1 \cdot 2} \frac{z^2}{\sigma^2} + \cdots\right).$$

Hieraus erkennt man, daß die Ungleichung

$$|\psi_\nu(x)| \leqq M \frac{(1+M|x|)(2+M|x|)\cdots(\nu+M|x|)}{1\cdot 2\cdots\nu}\,\frac{1}{\sigma^\nu}$$

$$= M\left(1+\frac{M|x|}{1}\right)\left(1+\frac{M|x|}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{M|x|}{\nu}\right)\frac{1}{\sigma^\nu}$$

gilt. Daher ist, wenn k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, für $|z|<\sigma$

$$\left|\sum_{\nu=k}^{\infty}\psi_\nu(x)z^\nu\right| \leqq M\left(1+\frac{M|x|}{1}\right)\left(1+\frac{M|x|}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{M|x|}{k}\right)\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^k$$

$$\times\left[1+\left(1+\frac{M|x|}{k+1}\right)\frac{|z|}{\sigma}+\left(1+\frac{M|x|}{k+1}\right)\left(1+\frac{M|x|}{k+2}\right)\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^2+\cdots\right]$$

$$\leqq M(1+M|x|)^k\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^k\cdot\left[1+\left(1+\frac{M|x|}{1}\right)\frac{|z|}{\sigma}\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{M|x|}{1}\right)\left(1+\frac{M|x|}{2}\right)\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^2+\cdots\right];$$

oder also

$$(19)\qquad \left|\sum_{\nu=k}^{\infty}\psi_\nu(x)z^\nu\right| \leqq M(1+M|x|)^k\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^k\left(1-\frac{|z|}{\sigma}\right)^{-1-M|x|}.$$

Nunmehr kehren wir zu Formel (11) zurück. Zunächst ist nach (12) und (14)

$$f(z)\,\varphi(z)^n = f(z)\,e^{n\log\varphi(z)} = e^{nb_0z^p}\cdot f(z)\,e^{nz^pF(z)}$$

$$= e^{nb_0z^p}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_\nu(nz^p)\,z^\nu.$$

Setzt man das in (11) ein, so ergibt sich:

$$(20)\qquad \Phi_n = \int_0^{\varrho e^{i\omega_0}} z^{\alpha-1}\,e^{nb_0z^p}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_\nu(nz^p)\,z^\nu\cdot dz + O((1-\eta)^n).$$

Macht man jetzt die Substitution

$$z = e^{i\omega_0}\sqrt[p]{\frac{t}{nr}},$$

so ist

$$n z^p = e^{i\omega_0 p} \frac{t}{r} = - e^{-i\beta} \frac{t}{r} = - \frac{t}{b_0},$$

und Formel (20) geht über in folgende:

$$\Phi_n = \frac{1}{p} e^{i\omega_0 a} \int_0^{n r \varrho^p} e^{-t} \left(\frac{t}{nr}\right)^{\frac{a}{p}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu \left(-\frac{t}{b_0}\right) \left(e^{i\omega_0} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^\nu \cdot \frac{dt}{t}$$
$$+ O((1-\eta)^n).$$

Trennt man hier von der Summe die k ersten Glieder ab, so kommt:

$$(21) \begin{cases} \Phi_n = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{k-1} e^{i\omega_0(a+\nu)} \left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{a+\nu}{p}} \int_0^{n r \varrho^p} e^{-t} t^{\frac{a+\nu}{p}-1} \psi_\nu \left(-\frac{t}{b_0}\right) dt \\ \qquad + R_k + O((1-\eta)^n), \end{cases}$$

wobei

$$(22) \quad R_k = \frac{1}{p} e^{i\omega_0 a} \int_0^{n r \varrho^p} e^{-t} \left(\frac{t}{nr}\right)^{\frac{a}{p}} \cdot \sum_{\nu=k}^{\infty} \psi_\nu \left(-\frac{t}{b_0}\right) \left(e^{i\omega_0} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^\nu \cdot \frac{dt}{t}.$$

Nun schätzen wir zunächst den Rest R_k ab. Nach (19) besteht die Ungleichung

$$\left| \sum_{\nu=k}^{\infty} \psi_\nu \left(-\frac{t}{b_0}\right) \left(e^{i\omega_0} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^\nu \right|$$
$$\leqq M \left(1 + \frac{Mt}{r}\right)^k \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^k \left(1 - \frac{1}{\sigma} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{-1-\frac{Mt}{r}},$$

sobald nur $\sqrt[p]{\frac{t}{nr}} < \sigma$ ist. Bei dem Integral (22) ist aber

$$t \leqq n r \varrho^p, \text{ also } \sqrt[p]{\frac{t}{nr}} \leqq \varrho.$$

Wählt man daher die positive Zahl ϱ zunächst kleiner als σ, so ist

$$\sqrt[p]{\frac{t}{nr}} \leqq \varrho < \sigma,$$

und man erhält die Ungleichung:

$$\left|\sum_{\nu=k}^{\infty}\psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right)\left(e^{i\omega_0}\sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^\nu\right|$$
$$\leq M\left(1+\frac{Mt}{r}\right)^k\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^k\left(1-\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{-1-\frac{Mt}{r}}.$$

Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aus (22):

$$|R_k|\leq\frac{M}{p}\left|e^{i\omega_0 a}\right|\frac{\left(1-\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{-1}}{\sigma^k}\left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{\Re(a)+k}{p}}$$
$$\times\int_0^{nr\varrho^p}e^{-t}\left(1-\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{-\frac{M}{r}t}t^{\frac{\Re(a)+k}{p}-1}\left(1+\frac{Mt}{r}\right)^k dt.$$

Nun wollen wir die Zahl ϱ so klein wählen, daß

$$e\cdot\left(1-\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{\frac{M}{r}}>1$$

ist. Dann läßt sich in dem letzten Integral die obere Grenze ins Unendliche erstrecken, wodurch das Integral einen größeren, aber von n unabhängigen Wert erhält. Daher ist schließlich

$$|R_k|<C_k\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\Re(a)+k}{p}},$$

wo C_k von n nicht abhängt. Aus Formel (21) erhält man somit:

$$(23)\quad\begin{cases}\Phi_n=\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{k-1}e^{i\omega_0(a+\nu)}\left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{a+\nu}{p}}\int_0^{nr\varrho^p}e^{-t}t^{\frac{a+\nu}{p}-1}\psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right)dt\\ \qquad\qquad+O\left(\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{\Re(a)+k}{p}}\right).\end{cases}$$

Denn das in (21) stehende Fehlerglied $O\left((1-\eta)^n\right)$ kann weggelassen werden, weil es von kleinerer Ordnung ist als das hier angeschriebene.

Für das in (23) auftretende Integral erhält man, wenn für ψ_ν die Reihe (15) eingesetzt wird:

$$(24) \quad \int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} t^{\frac{\alpha+\nu}{p}-1} \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) dt = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{g_{\nu,\mu}}{(-b_0)^\mu} \int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} t^{\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu-1} dt.$$

Nun ist offenbar

$$(25) \quad \int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} t^{\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu-1} dt = \int_0^\infty - \int_{nr\varrho^p}^\infty$$

Da die Funktion

$$e^{-t} t^{\frac{\Re(\alpha)+\nu}{p}+\mu+1}$$

für genügend große t monoton abnimmt, so ist das letzte Integral absolut kleiner als

$$\int_{nr\varrho^p}^\infty e^{-nr\varrho^p} (nr\varrho^p)^{\frac{\Re(\alpha)+\nu}{p}+\mu+1} \frac{dt}{t^2} = e^{-nr\varrho^p} (nr\varrho^p)^{\frac{\Re(\alpha)+\nu}{p}+\mu},$$

sofern nur die Zahl n genügend groß angenommen wird. Dagegen ist das erste Integral auf der rechten Seite von (25) eine Gammafunktion, und man erhält:

$$\int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} t^{\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu-1} dt = \Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu\right) + O\left(e^{-nr\varrho^p}(nr\varrho^p)^{\frac{\Re(\alpha)+\nu}{p}+\mu}\right)$$

Daher a fortiori:

$$\int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} t^{\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu-1} dt = \Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu\right) + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{p}}\right);$$

denn dieses Fehlerglied ist von größerer Ordnung als das vorige.

Trägt man das letzte Ergebnis in (24) ein, so kommt zunächst:

$$\int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} t^{\frac{\alpha+\nu}{p}-1} \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) dt = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{g_{\nu,\mu}}{(-b_0)^\mu} \Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu\right) + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{p}}\right).$$

Schließlich ergibt sich also, wenn man das in (23) einträgt, das folgende Endresultat:

$$(26) \qquad \Phi_n = \frac{1}{p}\sum_{\nu=0}^{k-1} P_\nu \left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{a+\nu}{p}} + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\Re(a)+k}{p}}\right),$$

wobei

$$(27) \qquad P_\nu = e^{i\omega_0(a+\nu)} \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{g_{\nu,\mu}}{(-b_0)^\mu} \Gamma\left(\frac{a+\nu}{p} + \mu\right)$$

ist. Da die Formel (26) für beliebig große Werte von k gilt, so kann man das Resultat einfacher in folgender Weise als asymptotische Gleichung schreiben:

$$(28) \qquad \Phi_n \sim \frac{1}{p}\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu \left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{a+\nu}{p}}.$$

Die Formel (27) läßt sich noch folgendermaßen interpretieren. P_ν ist der Koeffizient von z^ν in der Entwicklung der Funktion

$$e^{i\omega_0(a+\nu)}\,\Gamma\left(\frac{a+\nu}{p}\right) \cdot (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)$$
$$\times \left(1 + \frac{b_1 z + b_2 z^2 + \cdots}{b_0}\right)^{-\frac{a+\nu}{p}}$$

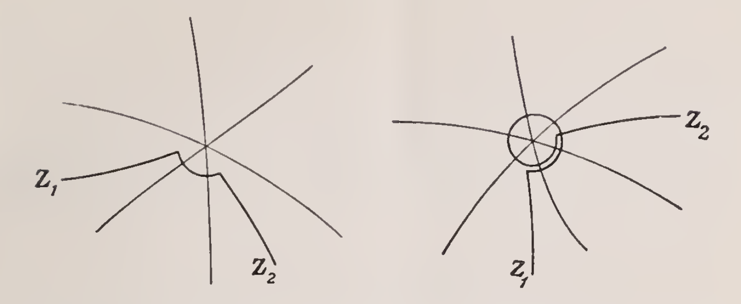
nach Potenzen von z. Jedoch dürfte für die wirkliche Ausrechnung die Beibehaltung der Zahlen $g_{\nu,\mu}$ zweckmäßiger sein.

§ 4.

Nunmehr wenden wir uns zu dem Integral

$$(29) \qquad \Omega_n = \int_{Z_1}^{Z_2} z^{a-1} f(z)\,\varphi(z)^n\,dz,$$

wobei $f(z)$, $\varphi(z)$ die gleiche Bedeutung haben wie bisher. Die Integrationsgrenzen Z_1 und Z_2 sollen in zwei Sektoren S_1 und S_2 liegen, in denen $|\varphi(z)| < 1$ ist, und der Integrationsweg soll folgenden Verlauf haben (siehe die beiden Figuren):



Zunächst von Z_1 im Sektor S_1 in die Umgebung des Nullpunkts; sodann auf einem Kreisbogen um den Nullpunkt in den Sektor S_2; schließlich in S_2 zum Endpunkt Z_2.

Ist $\Re(a) > 0$, so kann das Integral Ω_n sofort auf das in § 3 behandelte zurückgeführt werden. Läßt man nämlich den Radius des Kreisbogens gegen Null abnehmen, so konvergiert das Integral über den Kreisbogen gegen Null, während die Integrale in den Sektoren S_1 und S_2 die Form $-\Phi_n$ und $+\Phi_n$ haben. Sind daher

$$(30)\qquad \begin{cases} \omega_1 = -\dfrac{\beta}{p} + \dfrac{2l_1+1}{p}\pi, \\ \omega_2 = -\dfrac{\beta}{p} + \dfrac{2l_2+1}{p}\pi \end{cases}$$

die Richtungswinkel für die Winkelhalbierenden der Sektoren S_1 und S_2, so gilt nach den Ergebnissen des § 3 die asymptotische Gleichung

$$(31)\qquad \Omega_n \sim \frac{1}{p}\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu \left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{a+\nu}{p}},$$

wobei die Koeffizienten Q_ν die folgende Bedeutung haben:

$$(32)\qquad Q_\nu = \left(e^{i\omega_2(a+\nu)} - e^{i\omega_1(a+\nu)}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{g_{\nu,\mu}}{(-b_0)^\mu}\,\Gamma\left(\frac{a+\nu}{p}+\mu\right).$$

Wir wollen nun zeigen, daß dieses zunächst für $\Re(a) > 0$ erhaltene Resultat unverändert auch ohne diese Einschränkung gilt. Dazu wählen wir den Integrationsweg in der folgenden offenbar erlaubten Weise:

Zuerst vom Punkt Z_1 im Sektor S_1 zum Punkt $\varrho e^{i\omega_1}$; von da auf einem Kreisbogen um den Nullpunkt zum Punkt $\varrho e^{i\omega_2}$; von hier endlich im Sektor S_2 zum Punkt Z_2. Der Radius ϱ des Kreisbogens darf beliebig klein gewählt werden, muß jedoch wieder unabhängig von n sein. Dann sind die Integrale über den ersten und dritten Teil wie in § 3 gleich $O((1-\eta)^n)$.

Daher:

$$\Omega_n = \int_{\varrho e^{i\omega_1}}^{\varrho e^{i\omega_2}} z^{\alpha-1} f(z)\varphi(z)^n dz + O((1-\eta)^n),$$

oder, wenn man für $f(z)\varphi(z)^n$ wieder die früher benutzte Reihe einsetzt:

$$\Omega_n = \int_{\varrho e^{i\omega_1}}^{\varrho e^{i\omega_2}} z^{\alpha-1} e^{n b_0 z^p} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(nz^p) z^\nu \cdot dz + O((1-\eta)^n). \tag{33}$$

Macht man jetzt die Substitution

$$z = e^{i\omega_1}\sqrt[p]{\frac{t}{nr}},$$

so ist wieder

$$nz^p = -\frac{t}{b_0},$$

und Formel (33) geht über in:

$$\Omega_n = \frac{1}{p} e^{i\omega_1\alpha} \int_{nr\varrho^p}^{nr\varrho^p} e^{-t}\left(\frac{t}{nr}\right)^{\frac{\alpha}{p}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right)\left(e^{i\omega_1}\sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^\nu \cdot \frac{dt}{t} + O((1-\eta)^n),$$

wobei der Integrationsweg jetzt aus $l_2 - l_1$ Umläufen um den Nullpunkt besteht[1]). Trennt man von der Summe wieder die k ersten Glieder ab, so kommt, wenn die Integrationsgrenzen der Einfachheit halber weggelassen werden:

$$\left\{\begin{aligned} \Omega_n = \frac{1}{p}\sum_{\nu=0}^{k-1} e^{i\omega_1(\alpha+\nu)}\left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{\alpha+\nu}{p}} \int e^{-t} t^{\frac{\alpha+\nu}{p}-1} \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) dt \\ + R_k' + O((1-\eta)^n), \end{aligned}\right. \tag{34}$$

[1]) Ist $l_2 < l_1$, so sind es $l_1 - l_2$ Umläufe in negativer Richtung.

wobei

$$(35)\quad R_k' = \frac{1}{p} e^{i\omega_1 a} \int e^{-t} \left(\frac{t}{nr}\right)^{\frac{a}{p}} \cdot \sum_{\nu=k}^{\infty} \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) \left(e^{i\omega_1} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{\nu} \cdot \frac{dt}{t}.$$

In R_k' kann man den Integrationsweg folgendermaßen abändern: Zuerst von $nr\varrho^p$ auf der reellen Achse beliebig nahe an den Nullpunkt heran, etwa bis zum Punkt ζ, sodann $(l_2 - l_1)$-mal um den Nullpunkt herum, und schließlich längs der reellen Achse nach $nr\varrho^p$ zurück. Wenn $\Re(a) + k > 0$ ist, kann man zur Grenze $\zeta = 0$ übergehen, und bei Berücksichtigung der Gleichung

$$\omega_1 + \frac{l_2 - l_1}{p} 2\pi = \omega_2$$

erhält man dadurch:

$$R_k' = -\frac{1}{p} e^{i\omega_1 a} \int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} \left(\frac{t}{nr}\right)^{\frac{a}{p}} \cdot \sum_{\nu=k}^{\infty} \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) \left(e^{i\omega_1} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{\nu} \cdot \frac{dt}{t}$$

$$+ \frac{1}{p} e^{i\omega_2 a} \int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} \left(\frac{t}{nr}\right)^{\frac{a}{p}} \cdot \sum_{\nu=k}^{\infty} \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) \left(e^{i\omega_2} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{\nu} \cdot \frac{dt}{t}.$$

Die hier auftretenden Integrale sind aber die gleichen wie in Formel (22); nur ist ω_0 durch ω_1 bzw. ω_2 ersetzt. Wenn also ϱ klein genug gewählt wird, so erhält man wie früher die Abschätzung:

$$|R_k'| < C_k' \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\Re(a)+k}{p}},$$

wo C_k' von n nicht abhängt. Aus (34) folgt daher:

$$(36)\quad \begin{cases} \Omega_n = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{k-1} e^{i\omega_1(a+\nu)} \left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{a+\nu}{p}} \int e^{-t}\, t^{\frac{a+\nu}{p}-1} \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) dt \\ \qquad + O\left(\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{\Re(a)+k}{p}}\right). \end{cases}$$

Für das hier auftretende Integral erhält man, wenn für ψ_ν die Reihe (15) eingesetzt wird:

$$(37) \quad \int e^{-t}\, t^{\frac{\alpha+\nu}{p}-1}\, \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) dt = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{g_{\nu,\mu}}{(-b_0)^\mu} \int e^{-t}\, t^{\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu-1}\, dt.$$

Der Integrationsweg ist dabei ein $(l_2 - l_1)$-maliger Umlauf um den Nullpunkt vom Punkt $nr\varrho^p$ zu diesem Punkt zurück. Diesem Weg darf man aber vorn und hinten noch das Stück der reellen Achse von $nr\varrho^p$ bis ∞ hinzufügen; denn die hierdurch neu hinzukommenden Integralteile sind von geringerer Größenordnung als das in (36) angeschriebene Fehlerglied (vgl. die Abschätzung im Anschluß an Fl. (25)). Für den so modifizierten Integrationsweg ist aber bekanntlich

$$(38) \quad \begin{cases} \int e^{-t}\, t^{\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu-1}\, dt = \left(e^{2\pi i (l_2-l_1)\frac{\alpha+\nu}{p}} - 1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu\right) \\ \qquad = \left(e^{i(\omega_2-\omega_1)(\alpha+\nu)} - 1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu\right). \end{cases}$$

Wenn einmal $\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu = -\lambda$ eine negative ganze Zahl oder Null sein sollte, so ist hier der Grenzwert zu setzen, den die rechte Seite in diesem Fall annimmt. Dieser ist gleich

$$\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\, 2\pi i\, (l_2 - l_1) = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\, p\, i\, (\omega_2 - \omega_1);$$

doch wollen wir der Gleichförmigkeit halber die Formel (38) auch für diesen Fall beibehalten.

Setzt man (38) in (37) und dann in (36) ein, so kommt:

$$(39) \qquad \Omega_n = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_\nu \left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{\alpha+\nu}{p}} + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\Re(\alpha)+k}{p}}\right),$$

wobei Q_ν die in (32) angegebene Bedeutung hat. Die Formel (39) besagt aber genau soviel wie die Formel (31), die damit in voller Allgemeinheit bewiesen ist.

Zugleich erkennt man, daß, wenn einmal $\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu$ eine negative ganze Zahl oder Null ist, auf der rechten Seite von (32) der Grenzwert stehen muß, den dieser Ausdruck dann annimmt.

§ 5.

Wir behandeln jetzt einige Beispiele.

Erstes Beispiel. In der Theorie der Gammafunktion beweist man die Formel

$$\log \Gamma(n+1) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi}$$
$$+\int_0^\infty \frac{1}{z}\left(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\right)e^{-nz}\,dz.$$

Zerlegt man das Integral in

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty,$$

so ist das zweite Integral der rechten Seite gleich $O(e^{-n})$, während das erste die in § 3 behandelte Form hat. Und zwar ist

$$a = 1,$$
$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\right) = \frac{B_1}{2!} - \frac{B_2}{4!}z^2 + \frac{B_3}{6!}z^4 - \frac{B_4}{8!}z^6 + \cdots,$$
$$\log\varphi(z) = -z,$$

wobei $B_1, B_2, B_3, \cdots$ die Bernouillischen Zahlen sind. Man hat also:

$$p = 1,$$
$$a_{2\nu} = (-1)^\nu \frac{B_{\nu+1}}{(2\nu+2)!}, \quad a_{2\nu+1} = 0,$$
$$b_0 = -1, \quad b_\nu = 0 \text{ für } \nu \geqq 1,$$
$$r = 1, \quad \beta = \pi, \quad \omega_0 = 0,$$

und folglich:

$$g_{2\nu,0} = (-1)^\nu \frac{B_{\nu+1}}{(2\nu+2)!}, \quad g_{2\nu+1,0} = 0,$$
$$g_{\nu,\mu} = 0 \text{ für } \mu \geqq 1.$$

Nach Formel (27) ist daher $P_\nu = g_{\nu,0} \cdot \Gamma(1+\nu) = g_{\nu,0} \cdot \nu!$; also:

$$P_{2\nu} = (-1)^\nu \frac{B_{\nu+1}}{(2\nu+1)(2\nu+2)}, \quad P_{2\nu+1} = 0.$$

Folglich nach (28):

$$\int_0^1 \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{B_{\nu+1}}{(2\nu+1)(2\nu+2)} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+2\nu}.$$

Die gleiche asymptotische Darstellung gilt dann aber auch für

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + O(e^{-n}),$$

so daß wir folgendes Resultat erhalten:

$$\log \Gamma(n+1) \sim (n+\tfrac{1}{2}) \log n - n + \log \sqrt{2\pi}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{B_{\nu+1}}{(2\nu+1)(2\nu+2)} \cdot \frac{1}{n^{2\nu+1}}.$$

Das ist die bekannte Stirlingsche Reihe.

Zweites Beispiel. Macht man in der Formel

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx$$

die Substitution $x = ny$, so ergibt sich:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{n^{n+1}} = \int_0^\infty (ye^{-y})^n \, dy.$$

Die Funktion ye^{-y} hat ihr Maximum an der Stelle $y = 1$.

Setzt man daher $y = 1 + z$, so kommt:

$$\frac{e^n \Gamma(n+1)}{n^{n+1}} = \int_{-1}^\infty [(1+z)e^{-z}]^n \, dz = \int_{-1}^1 + \int_1^\infty.$$

Nun ist

$$\int_1^\infty [(1+z)e^{-z}]^n \, dz = \int_1^\infty [(1+z)e^{-z}]^{n-1} (1+z) e^{-z} \, dz$$
$$< \int_1^\infty \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} (1+z) e^{-z} \, dz = O\left(\left(\frac{2}{e}\right)^n\right),$$

während dagegen das Integral

$$\int_{-1}^{1} [(1+z)e^{-z}]^n \, dz$$

die in § 4 behandelte Form hat. Und zwar wird

$$a = 1,$$
$$f(z) = 1,$$
$$\log \varphi(z) = \log(1+z) - z = -\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + - \cdots.$$

Daher

$$p = 2,$$
$$a_0 = 1, \quad a_\nu = 0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq 1,$$
$$b_\nu = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu+2},$$
$$r = \tfrac{1}{2}, \quad \beta = \pi, \quad \omega_1 = \pi, \quad \omega_2 = 0.$$

Folglich ist

$$g_{0,0} = 1, \quad g_{\nu,0} = 0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq 1,$$

und allgemein ist $g_{\nu,\mu}$ der Coefficient von z^ν in

$$\frac{1}{\mu!}\left(\frac{z}{3} - \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{5} - \cdots\right)^\mu.$$

Aus Formel (32) folgt dann:

$$Q_0 = 2\,\Gamma(\tfrac{1}{2}),$$
$$Q_{2\nu} = 2\sum_{\mu=1}^{2\nu} g_{2\nu,\mu}\, 2^\mu\, \Gamma(\tfrac{1}{2} + \nu + \mu) \quad \text{für} \quad \nu \geqq 1,$$
$$Q_{2\nu+1} = 0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq 0,$$

und nach (31) gilt die asymptotische Gleichung

$$\int_{-1}^{1} [(1+z)e^{-z}]^n \, dz \sim \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{2\nu} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}+\nu};$$

folglich auch

$$\frac{e^n\,\Gamma(n+1)}{n^{n+1}} \sim \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{2\nu} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}+\nu},$$

da das Fehlerglied $O\left(\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)$ von geringerer Ordnung ist.

Die Koeffizienten lassen sich noch etwas einfacher schreiben. Es ist

$$Q_0 = 2\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi},$$

und für $\nu \geq 1$

$$Q_{2\nu} = 2\sum_{\mu=1}^{2\nu} g_{2\nu,\mu}\, 2^{\mu} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2\nu+2\mu-1}{2}$$

$$= 2\sqrt{\pi} \cdot 2^{-\nu} \sum_{\mu=1}^{2\nu} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu+2\mu-1) \cdot g_{2\nu,\mu}.$$

Setzt man also $1 = R_0$, und für $\nu \geq 1$

$$\sum_{\mu=1}^{2\nu} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu+2\mu-1) \cdot g_{2\nu,\mu} = R_\nu,$$

so ergibt sich:

$$\frac{e^n\,\Gamma(n+1)}{n^{n+1}} \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}\, R_\nu \sqrt{2}}{n^{\frac{1}{2}+\nu}},$$

oder also:

$$\Gamma(n+1) \sim n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} \sqrt{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{R_\nu}{n^\nu}.$$

Die wirkliche Ausrechnung der Koeffizienten R_ν ist mühsam. Die ersten Werte sind:

$$R_0 = 1, \quad R_1 = \frac{1}{2^2 \cdot 3}, \quad R_2 = \frac{1}{2^5 \cdot 3^2}, \quad R_3 = -\frac{139}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5}.$$

Drittes Beispiel. In der Theorie der Keplerschen Bewegung spielt das Integral

$$A_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{n(x-\varepsilon \sin x)i}}{1-\varepsilon \cos x}\, dx \tag{40}$$

eine Rolle; dabei soll $0 < \varepsilon < 1$, und n ganzzahlig sein. Es ist

$$A_n = \int_{-\pi}^{-\pi+\tau i} + \int_{-\pi+\tau i}^{\pi+\tau i} + \int_{\pi+\tau i}^{\pi},$$

wo die Integrationswege geradlinig sind. Aber das erste und

dritte Integral auf der rechten Seite heben sich gegenseitig auf, weil n ganzzahlig ist, und es ergibt sich:

$$A_n = \int_{-\pi+\tau i}^{\pi+\tau i} \frac{e^{n(x-\varepsilon \sin x)i}}{1-\varepsilon \cos x}\, dx.$$

Dabei wollen wir die Zahl τ positiv und möglichst vorteilhaft wählen. Für $x = z + \tau i$ ist

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos \tau i \cdot \sin z + \sin \tau i \cdot \cos z \\ &= \frac{1}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) \sin z + \frac{i}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) \cos z;\end{aligned}$$

also

$$\left| e^{(x-\varepsilon \sin x)i} \right| = e^{-\tau + \frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) \cos z}.$$

Das Maximum des Exponenten tritt ein für $z = 0$ und hat den Wert

$$-\tau + \frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon^{\tau} - e^{-\tau}).$$

Dieses Maximum wird möglichst klein, wenn

$$-1 + \frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau} + \varepsilon^{-\tau}) = 0$$

ist, also für

$$\tau = \log \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}. \tag{41}$$

Indem wir fortan mit τ nur den Wert (41) bezeichnen, bemerken wir, daß im Innern des Rechtecks mit den Ecken

$$-\pi, \quad -\pi + \tau i, \quad \pi + \tau i, \quad \pi$$

kein singulärer Punkt des Integranden liegt; wohl aber liegt ein solcher auf dem Rand an der Stelle τi; denn es ist

$$1 - \varepsilon \cos \tau i = 1 - \frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) = 0.$$

In der Formel

$$A_n = \int_{-\pi+\tau i}^{\pi+\tau i} \frac{e^{n(x-\varepsilon \sin x)i}}{1-\varepsilon \cos x}\, dx$$

muß daher der Integrationsweg dem Punkt τi nach unten ausweichen. Setzt man $x = z + \tau i$, so kommt:

$$A_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{n(z + \tau i - \varepsilon \sin(z + \tau i))i}}{1 - \varepsilon \cos(z + \tau i)}\, dz,$$

wobei der Integrationsweg dem Nullpunkt in der unteren Halbebene ausweichen muß. Da aber mit Berücksichtigung von (41)

$$e^{\tau i i} = e^{-\tau} = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon \sin(z + \tau i) = \frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) \sin z + i \frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) \cos z$$
$$= \sin z + i \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos z,$$

$$\varepsilon \cos(z + \tau i) = \frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) \cos z - i \frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) \sin z$$
$$= \cos z - i \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin z$$

ist, so kommt nach leichter Umformung:

$$A_n = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\, e^{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} z^{-1} f(z) \varphi(z)^n\, dz, \tag{42}$$

wobei

$$f(z) = \frac{z}{1 - \cos z + i \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin z}, \tag{43}$$

$$\log \varphi(z) = i(z - \sin z) - \sqrt{1 - \varepsilon^2}(1 - \cos z) \tag{44}$$

ist. Die Funktion $\varphi(z)$ erfüllt unsere Voraussetzungen, und zwar ist

$$\log \varphi(z) = -\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2} z^2 + \frac{i}{6} z^3 + \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{24} z^4 - \frac{i}{120} z^5 \cdots;$$

also:

$$p = 2,$$

$$b_0 = -\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2}, \quad b_1 = \frac{i}{6}, \quad b_2 = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{24}, \quad b_3 = -\frac{i}{120}, \ldots,$$

$$r = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2}, \quad \beta = \pi, \quad \omega_1 = \pi, \quad \omega_2 = 2\pi.$$

Ebenso erfüllt die Funktion $f(z)$ unsere Voraussetzungen, und zwar ist

$$f(z) = 1 : \left[i\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{2} z - \frac{i\sqrt{1-\varepsilon^2}}{6} z^2 - \frac{1}{24} z^3 \ldots \right]$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} z + i \frac{1+2\varepsilon^2}{12\sqrt{1-\varepsilon^2}^3} z^2 - \frac{\varepsilon^2}{8(1-\varepsilon^2)^2} z^3 \ldots$$

Das Integral in (42) hat also die in § 4 behandelte Form mit $\alpha = 0$. Die Koeffizienten Q_ν mit geradem Index sind nach (32) alle gleich Null, mit Ausnahme von Q_0. Für diesen tritt die am Schluß des § 4 gemachte Bemerkung in Kraft; demnach ist

$$Q_0 = g_{0,0} \cdot \lim_{\nu=0} (e^{2i\pi\nu} - e^{i\pi\nu})\, \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = 2\pi i g_{0,0}.$$

Die Zahl $g_{\nu,\mu}$ ist der Koeffizient von z^ν in

$$\frac{1}{\mu!}\left(\frac{-i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} z + i \frac{1+2\varepsilon^2}{12\sqrt{1-\varepsilon^2}^3} z^2 - \frac{\varepsilon^2}{8(1-\varepsilon^2)^2} z^3 \ldots\right)$$

$$\times \left(\frac{i}{6} z + \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{24} z^2 - \frac{i}{120} z^3 \ldots\right)^\mu.$$

Daher $g_{0,0} = \dfrac{-i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, und also

$$Q_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Ferner ist

$$g_{1,0} = \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)}, \quad g_{1,1} = \frac{1}{6\sqrt{1-\varepsilon^2}};$$

also

$$Q_1 = 2\left[\frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3(1-\varepsilon^2)} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right] = \frac{4\sqrt{\pi}}{3(1-\varepsilon^2)}.$$

Die Zahlen $g_{2,\mu}$ brauchen nicht berechnet zu werden, da wir bereits erkannt haben, daß $Q_2 = 0$ ist (der Index ist gerade). Dagegen wollen wir noch die Zahlen $g_{3,\mu}$ angeben; eine leichte Rechnung liefert:

$$g_{3,0} = \frac{-\varepsilon^2}{8(1-\varepsilon^2)^2}, \quad g_{3,1} = \frac{-1-29\varepsilon^2}{720\sqrt{1-\varepsilon^2}^3}, \quad g_{3,2} = \frac{-\varepsilon^2}{144(1-\varepsilon^2)},$$

$$g_{3,3} = \frac{-1}{1296\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Also:

$$Q_3 = 2\left[\frac{-\varepsilon^2}{8(1-\varepsilon^2)^2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) - \frac{1+29\varepsilon^2}{360(1-\varepsilon^2)^2}\Gamma(\tfrac{5}{2}) - \frac{\varepsilon^2}{36(1-\varepsilon^2)^2}\Gamma(\tfrac{7}{2})\right.$$
$$\left. - \frac{1}{162(1-\varepsilon^2)^2}\Gamma(\tfrac{9}{2})\right] = -\frac{46+189\varepsilon^2}{540(1-\varepsilon^2)^2}\sqrt{\pi}.$$

Der Koeffizient Q_4 ist wieder Null, weil er einen geraden Index hat. Weiter wollen wir die Rechnung nicht führen. Die Formel (31) liefert dann für das in (42) auftretende Integral den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{4\sqrt{\pi}}{3(1-\varepsilon^2)}\left(\frac{2}{n\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{46+189\varepsilon^2}{540(1-\varepsilon^2)^2}\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{n\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$+ O\left(\frac{1}{\sqrt{n^5}}\right);$$

also endlich, wenn man das in (42) einsetzt:

$$(45)\quad \begin{cases} A_n = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^n \cdot \left[1 + \dfrac{2}{3\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\dfrac{2}{n\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\ \qquad \left. - \dfrac{46+189\varepsilon^2}{1080\sqrt{\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2}^3}\left(\dfrac{2}{n\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^{\frac{3}{2}} + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^5}}\right)\right]. \end{cases}$$

Viertes Beispiel. Wir behandeln jetzt das Integral (40) im Fall $\varepsilon = 1$. Dann hat aber der Integrand am Nullpunkt einen Pol zweiter Ordnung, und wir setzen demgemäß

$$(46)\qquad B_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{n(z-\sin z)i}}{1-\cos z}\,dz$$

mit dem Zusatz, daß der Integrationsweg dem Nullpunkt ausweichen muß. Ob das in der oberen oder unteren Halbebene

geschieht, ist ohne Einfluß auf den Wert des Integrals, da, wie man leicht sieht, das Residuum des Integranden verschwindet.

Es ist, wenn γ eine kleine positive Zahl bedeutet,

$$B_n = \int_{-\pi}^{-\pi+\gamma\pi i} + \int_{-\pi+\gamma\pi i}^{\pi+\gamma\pi i} + \int_{\pi+\gamma\pi i}^{\pi} .$$

Das erste und dritte Integral der rechten Seite heben sich gegenseitig auf, weil n ganzzahlig ist; als Weg für das mittlere kann die gebrochene Linie

$$-\pi + \gamma\pi i, \quad 0, \quad \pi + \gamma\pi i$$

gewählt werden, jedoch mit Umgehung des Nullpunkts. Bezeichnen wir diese Linie kurz mit L, so ist also

$$B_n = \int_L z^{-2} f(z)\,\varphi(z)^n\,dz, \tag{47}$$

wobei

$$f(z) = \frac{z^2}{1-\cos z}, \quad \varphi(z) = e^{(z-\sin z)i}. \tag{48}$$

Auf der Linie L ist $z = \tau(\pm 1 + \gamma i)$, wo τ von 0 bis π läuft. Daher

$$|\varphi(z)| = |e^{(z-\sin z)i}| = e^{-\tau\gamma + \frac{1}{2}(e^{\tau\gamma}-e^{-\tau\gamma})\cos\tau}.$$

Der hier auftretende Exponent ist, wenn $\gamma < \frac{1}{2\pi}$ gewählt wird, gleich

$$-\tau\gamma + \left(\tau\gamma + \frac{\tau^3\gamma^3}{3!} + \frac{\tau^5\gamma^5}{5!} + \cdots\right)\cos\tau = -\tau\gamma(1-\cos\tau)$$

$$+\left(\frac{\tau^3\gamma^3}{3!} + \frac{\tau^5\gamma^5}{5!} + \cdots\right)\cos\tau$$

$$\leqq -\tau\gamma\cdot\frac{\tau^2}{12} + \frac{\tau^3\gamma^3}{6}\cdot\frac{1}{1-\tau\gamma} \leqq -\frac{\tau^3\gamma}{12} + \frac{\tau^3\gamma^3}{3} = -\frac{\tau^3\gamma}{12}(1-4\gamma^2);$$

er ist also negativ; nur für $\tau = 0$ verschwindet er. Folglich ist $\varphi(0) = 1$ und sonst auf L durchweg $|\varphi(z)| < 1$.

Das Integral (47) hat somit die in § 4 behandelte Form mit $\alpha = -1$, und zwar ist

$$f(z) = \frac{z^2}{1 - \cos z} = 2 + \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{120} z^4 + \cdots,$$

$$\log \varphi(z) = (z - \sin z) i = \frac{i}{3!} z^3 - \frac{i}{5!} z^5 + \frac{i}{7!} z^7 - \cdots;$$

also

$$(49) \begin{cases} p = 3, \\ b_0 = \frac{i}{3!}, \; b_1 = 0, \; b_2 = -\frac{i}{5!}, \; b_3 = 0, \; b_4 = \frac{i}{7!}, \cdots, \\ r = \frac{1}{6}, \; \beta = \frac{\pi}{2}, \; \omega_1 = \frac{5\pi}{6}, \; \omega_2 = \frac{7\pi}{6} \pm \pi, \end{cases}$$

wobei in ω_2 das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem man dem Nullpunkt in der unteren oder oberen Halbebene ausweicht. Die Zahl $g_{\nu,\mu}$ ist jetzt der Koeffizient von z^ν in

$$\frac{1}{\mu!} \frac{z^2}{1 - \cos z} \cdot \left(-\frac{i}{5!} z^2 + \frac{i}{7!} z^4 - \frac{i}{9!} z^6 + \cdots\right)^\mu$$
$$= \frac{1}{\mu!} \left(2 + \frac{1}{6} z^2 + \cdots\right) \left(-\frac{i}{120} z^2 + \cdots\right)^\mu.$$

Für ungerade ν ist daher $g_{\nu,\mu} = 0$, also auch $Q_\nu = 0$. Ferner enthält nach (32) Q_ν den Faktor

$$e^{i\omega_2(\alpha+\nu)} - e^{i\omega_1(\alpha+\nu)} = e^{\frac{i\pi}{6}(\nu-1)} - e^{\frac{5i\pi}{6}(\nu-1)};$$

also ist für $\nu \equiv 1 \pmod{3}$ ebenfalls $Q_\nu = 0$. Nur der Wert $\nu = 1$ würde eine Ausnahme machen, bei welcher die Bemerkung am Schluß des § 4 in Kraft tritt; jedoch ist Q_1 ebenfalls gleich Null, weil der Index ungerade ist. Als nicht verschwindende Koeffizienten Q_ν kommen demnach nur die folgenden in Frage:

$$Q_0, \; Q_2, \; Q_6, \; Q_8, \; Q_{12}, \; Q_{14}, \; \cdots$$

Es sind diejenigen, deren Index modulo 6 den Rest 0 oder 2 läßt. Wir wollen nur die beiden ersten berechnen.

Es ist $g_{0,0} = 2$; also

$$Q_0 = \left(e^{-\frac{i\pi}{6}} - e^{-\frac{5i\pi}{6}}\right) \cdot 2\,\Gamma(-\tfrac{1}{3}) = 2\sqrt{3}\,\Gamma(-\tfrac{1}{3})$$
$$= -6\sqrt{3}\,\Gamma(\tfrac{2}{3}).$$

Ferner ist

$$g_{2,0} = \frac{1}{6},\quad g_{2,1} = -\frac{i}{60},\quad g_{2,2} = 0;$$

also

$$Q_2 = \left(e^{\frac{i\pi}{6}} - e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)\left[\tfrac{1}{6}\,\Gamma(\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{10}\,\Gamma(\tfrac{4}{3})\right] = \tfrac{1}{5}\sqrt{3}\,\Gamma(\tfrac{1}{3}).$$

Die Koeffizienten Q_3, Q_4, Q_5 sind Null, und Formel (31) liefert daher das folgende Resultat:

$$B_n = \tfrac{1}{3}\left[-6\sqrt{3}\,\Gamma(\tfrac{2}{3})\left(\frac{6}{n}\right)^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{5}\sqrt{3}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right] + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right),$$

oder, etwas anders geschrieben:

$$(50)\quad B_n = -\frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{n}\left[\Gamma(\tfrac{2}{3}) - \frac{\sqrt[3]{36}}{30}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Fünftes Beispiel. Zum Schluß behandeln wir noch das Integral

$$(51)\qquad C_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{n(z - \sin z)i}\,dz.$$

Hier kann man den Integrationsweg genau wie beim vorigen Beispiel abändern, und es kommt analog zu (47)

$$(52)\qquad C_n = \int_L f(z)\,\varphi(z)^n\,dz,$$

wobei $f(z) = 1$ ist, während $\varphi(z)$ die gleiche Bedeutung hat wie beim vorigen Beispiel. Das Integral (52) hat daher die in § 4 behandelte Form mit $\alpha = 1$, und es gelten wieder die Formeln (49).

Die Zahl $g_{\nu,\mu}$ ist jetzt der Koeffizient von z^ν in

$$\frac{1}{\mu!}\left(-\frac{i}{5!}z^2 + \frac{i}{7!}z^4 - \frac{i}{9!}z^6 + \cdots\right)^\mu.$$

Für ungerade ν ist also wieder $g_{\nu,\mu} = 0$ und folglich $Q_\nu = 0$. Ferner enthält Q_ν diesmal den Faktor

$$e^{i\omega_2(\alpha+\nu)} - e^{i\omega_1(\alpha+\nu)} = e^{\frac{i\pi}{6}(\nu+1)} - e^{\frac{5i\pi}{6}(\nu+1)},$$

so daß für $\nu \equiv -1 \pmod{3}$ ebenfalls $Q_\nu = 0$ ist. Als nicht verschwindende Koeffizienten Q_ν kommen demnach jetzt nur die folgenden in Frage:

$$Q_0,\ Q_4,\ Q_6,\ Q_{10},\ Q_{12},\ Q_{16},\ \ldots$$

Es sind diejenigen, deren Index modulo 6 den Rest 0 oder 4 läßt. Wir wollen die drei ersten berechnen. Es ist $g_{0,0} = 1$; also

$$Q_0 = \left(e^{\frac{i\pi}{6}} - e^{\frac{5i\pi}{6}}\right) \cdot 1 \cdot \Gamma(\tfrac{1}{3}) = \sqrt{3}\,\Gamma(\tfrac{1}{3}).$$

Ferner ist

$$g_{4,0} = 0,\quad g_{4,1} = \frac{i}{7!},\quad g_{4,2} = \frac{-1}{2!\,(5!)^2},\quad g_{4,3} = 0,\quad g_{4,4} = 0;$$

also

$$Q_4 = \left(e^{\frac{5i\pi}{6}} - e^{\frac{25i\pi}{6}}\right) \cdot \left[-\frac{3!}{7!}\,\Gamma(\tfrac{5}{3}+1) + \frac{(3!)^2}{2!\,(5!)^2}\,\Gamma(\tfrac{5}{3}+2)\right]$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{420}\,\Gamma(\tfrac{2}{3}).$$

Endlich findet man

$$g_{6,0} = 0,\quad g_{6,1} = -\frac{i}{9!},\quad g_{6,2} = \frac{1}{5!\,7!},\quad g_{6,3} = \frac{i}{3!\,(5!)^3},$$
$$g_{6,4} = 0,\quad g_{6,5} = 0,\quad g_{6,6} = 0;$$

also

$$Q_6 = \left(e^{\frac{7i\pi}{6}} - e^{\frac{35i\pi}{6}}\right) \cdot \left[\frac{3!}{9!}\,\Gamma(\tfrac{7}{3}+1) - \frac{(3!)^2}{5!\,7!}\,\Gamma(\tfrac{7}{3}+2)\right.$$
$$\left. + \frac{(3!)^3}{3!\,(5!)^3}\,\Gamma(\tfrac{7}{3}+3)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{8100}\,\Gamma(\tfrac{1}{3}).$$

Die Koeffizienten Q_7, Q_8, Q_9 sind Null, und nach (31) ergibt sich daher folgendes Resultat:

$$C_n = \tfrac{1}{3}\left[\sqrt{3}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{420}\,\Gamma(\tfrac{2}{3})\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{5}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{8100}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{7}{3}}\right] + O\left(\frac{1}{n^{\frac{11}{3}}}\right),$$

oder etwas anders geschrieben:

$$(53)\quad \begin{cases} C_n = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{3}}\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\left[\Gamma(\tfrac{1}{3}) - \dfrac{\sqrt[3]{6}}{70}\,\Gamma(\tfrac{2}{3})\,\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}} - \dfrac{1}{225}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\,\dfrac{1}{n^2}\right. \\ \qquad\qquad \left. + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{10}{3}}}\right)\right]. \end{cases}$$

Unser drittes und fünftes Beispiel sind auch von Burkhardt a. a. O. behandelt, der aber von Formel (45) nur die beiden ersten, von Formel (53) gar nur das erste Glied ermittelt, während wir mit leichter Mühe nicht nur mehr Glieder berechnen, sondern vor allem auch die Größenordnung des Fehlers angeben konnten.



Über die Konvergenz periodischer und gewisser nicht-periodischer Kettenbrüche mit komplexen Gliedern.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 9. Juni 1917.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz periodischer Kettenbrüche mit komplexen Gliedern sind zuerst von Stolz[1]), sodann mit einigen Vervollständigungen und auf einfachere Weise von mir selbst[2]), späterhin nach einer dritten Methode auch von Herrn Perron[3]) abgeleitet worden. Während die Endergebnisse dieser verschiedenen Bearbeitungen, abgesehen von unerheblichen formalen Abweichungen, im wesentlichen übereinstimmen, ist vor einigen Jahren Herr von Pidoll[4]) auf einem anderen recht sinnreichen, aber etwas umständlichen Wege zu Bedingungsformen gelangt, welche mir als eine bemerkenswerte Verbesserung der bisher gefundenen erscheinen, da sie nicht, wie jene, von den (im allgemeinen) irrationalen Wurzeln einer gewissen quadratischen Gleichung abhängen, sondern lediglich rationale und zugleich (durch ihre Eigenschaft als Näherungszähler und -Nenner von Teilkettenbrüchen des gegebenen) einfach zu charakterisierende Verbindungen der Kettenbruchglieder in Anspruch nehmen und überdies die in dem vorliegenden Zusammenhange bisher nicht ausdrücklich beachteten zwei Möglichkeiten der unbedingten und bedingten Konvergenz unmittelbar zum Ausdruck bringen.

---

[1]) Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Bd. 2 (1886), S. 299.

[2]) Dieser Berichte, Bd. 30 (1900), S. 463.

[3]) Dieser Berichte, Bd. 35 (1906), S. 465.

[4]) Beiträge zur Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. Inaugural-Dissertation, München 1912.

Wegen dieser Vorzüge schien mir eine einfachere und durchsichtigere Herleitung dieser Bedingungen wünschenswert, die, im wesentlichen auf der schon früher von mir benützten, inzwischen jedoch noch erheblich vereinfachten Methode beruhend, zugleich eine vollkommene Einsicht in den inneren Zusammenhang der verschiedenen Bedingungsformen gewährt. Die Durchführung dieser Absicht bildet den Inhalt des ersten Paragraphen der folgenden Mitteilung.

In einem zweiten Paragraphen behandle ich ein von Herrn van Vleck[1]) herrührendes, jedoch von ihm nicht vollständig bewiesenes Konvergenz-Kriterium, das sich auf Kettenbrüche mit lauter Teilzählern 1 und komplexen Teilnennern bezieht[2]). Der fragliche Beweis ist zwar inzwischen in verbesserter Form erschienen, nämlich in der Neu-Ausgabe der Stolzschen Vorlesungen über allgemeine Arithmetik[3]). Doch geschieht diese Verbesserung zum Teil auf Kosten der Allgemeinheit des betreffenden Satzes, nämlich durch Hinzufügung gewisser ergänzender Voraussetzungen[4]), die lediglich dazu dienen, das von Herrn van Vleck angewendete Beweisverfahren, das auf Heranziehung eines nach Art einer Majorante wirkenden Hilfskettenbruches beruht, zu retten, dagegen für die Gültigkeit des Satzes selbst nicht erforderlich sind. Das letztere gilt auch von etwas einfacheren Ergänzungs-Bedingungen, die Herr Jensen[5]) an Stelle der bei Stolz-Gmeiner benützten angegeben hat.

---

[1]) Transact. Amer. Math. Soc. 2 (1901).

[2]) A. a. O. S. 222 als Theorem 3 bezeichnet. Es handelt sich hier nicht um das bekanntere, gewöhnlich schlechthin als van Vlecksches oder auch als van Vleck-Jensensches bezeichnete Kriterium (a. a. O. S. 229, Theorem 6), dessen Beweis von Herrn Jensen (Festskrift til H. G. Zeuthen, 1909) vervollständigt und wesentlich vereinfacht wurde und das auch, im Gegensatz zu dem hier in Frage stehenden, in das Lehrbuch des Herrn Perron (Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1913, S. 264) übergegangen ist.

[3]) O. Stolz und A. Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, Abt. II, 1905, S. 546.

[4]) Es sind das die a. a. O. mit 3a) und 3b) bezeichneten.

[5]) A. a. O. (s. Fußn. 2), S. 84.

§ 1. Unbedingte und bedingte Konvergenz rein periodischer Kettenbrüche.

1. Der unendliche Kettenbruch:

$$(1)\qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \cdots$$

sei rein periodisch mit der p gliedrigen Periode: $\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}$, so daß also:

$$(2\,a)\qquad \frac{a_{p+\nu}}{b_{p+\nu}} \equiv \frac{a_\nu}{b_\nu} \quad \text{für: } \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

anders geschrieben:

$$(2\,b)\qquad \frac{a_{\lambda+\mu p}}{b_{\lambda+\mu p}} \equiv \frac{a_\lambda}{b_\lambda} \quad \text{für: } \begin{cases} \lambda = 1, 2, \ldots p \\ \mu = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

und möge nach Bedarf durch das Symbol:

$$\left[\frac{a_1}{b_1}, \ldots \overline{\frac{a_p}{b_p}}\right]$$

bezeichnet werden. Die a_ν, b_ν können beliebige komplexe Zahlen sein, doch sollen die a_ν als durchweg von Null verschieden angenommen werden.

Ist der Kettenbruch überhaupt konvergent und wird sein Wert mit x bezeichnet, so hat man in bekannter Weise:

$$x = \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_p|}{|b_p} + \frac{x|}{|1}$$

also, wenn die Näherungsbrüche des Kettenbruches mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) bezeichnet werden:

$$x = \frac{A_p + x A_{p-1}}{B_p + x B_{p-1}},$$

so daß der Wert x des Kettenbruches jedenfalls eine Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$(\mathrm{I})\qquad B_{p-1} x^2 - (A_{p-1} - B_p)\, x - A_p = 0$$

sein muß. Dabei ist diese Gleichung, falls der Kettenbruch überhaupt konvergiert, allemal wirklich eine quadratische, d. h. es ist stets: $|B_{p-1}| > 0$. Man hat nämlich für jedes $\varrho \geq 1$ und $\mu \geq 1$:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\mu p+\varrho} \equiv \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\mu p}|}{|b_{\mu p}} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\varrho|}{|b_\varrho}$$

$$= \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\mu p}|}{|b_{\mu p}} + \frac{A_\varrho|}{|B_\varrho}$$

und daher:

$$(3) \qquad \begin{cases} A_{\mu p+\varrho} = B_\varrho A_{\mu p} + A_\varrho A_{\mu p-1} \\ B_{\mu p+\varrho} = B_\varrho B_{\mu p} + A_\varrho B_{\mu p-1}. \end{cases}$$

Aus der zweiten dieser Formeln folgt für $\varrho = p - 1$

$$(4) \qquad B_{(\mu+1)p-1} = B_{p-1} B_{\mu p} + A_{p-1} B_{\mu p-1}$$

und hieraus speziell für $\mu = 1$:

$$B_{2p-1} = B_{p-1}(B_p + A_{p-1}).$$

Ist also: $B_{p-1} = 0$, so hat man auch: $B_{2p-1} = 0$, folglich mit Benützung von (4) durch vollständige Induktion für jedes μ: $B_{\mu p-1} = 0$. Hiernach besitzt aber im Falle $B_{p-1} = 0$ der Kettenbruch unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche und ist also divergent. Mithin ergibt sich:

Die Bedingung:

$$(A) \qquad |B_{p-1}| > 0$$

ist eine *notwendige* für die Konvergenz des Kettenbruches (1).

Aus dieser Erkenntnis resultiert aber sofort eine ganze Folge von notwendigen Bedingungen für etwaige unbedingte Konvergenz des Kettenbruches. Soll nämlich der Kettenbruch (1) unbedingt konvergieren, so muß ja auch jeder der (gleichfalls rein periodischen) Kettenbrüche:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\lambda+1}^{\infty} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

konvergieren. Dabei genügt es offenbar wegen der vor-

handenen Periodizität, λ auf die Werte 1, 2, . . . $(p-1)$ zu beschränken.

Bezeichnet man nun die reduzierte Form (d. h. den letzten rein formal in bekannter Weise gebildeten Näherungsbruch) des Kettenbruches:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\lambda+1}^{\infty} \quad \text{mit:} \quad \frac{A_{\lambda,\lambda+\varrho}}{B_{\lambda,\lambda+\varrho}}\,[1]),$$

(so daß also, wenn man auch den Fall $\lambda = 0$ in diese Bezeichnungsweise einbezieht, $A_{0,\lambda+\varrho} \equiv A_{\lambda+\varrho}$, $B_{0,\lambda+\varrho} \equiv B_{\lambda+\varrho}$) so ergibt sich aus (A) als notwendige Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\lambda+1}^{\infty}$ die Beziehung:

$$|B_{\lambda,\lambda+p-1}| > 0.$$

Diese muß dann, wenn der Kettenbruch (1) unbedingt konvergieren soll, außer der Bedingung (A) für $\lambda = 1, 2, \ldots (p-1)$ erfüllt sein. Schreibt man noch $\lambda + 1$ statt λ, so findet man (mit Benützung von Formel (a) der Fußnote):

> Für die *unbedingte* Konvergenz des Kettenbruches (1) ist *notwendig*, daß zu der Bedingung (A) noch die folgenden hinzutreten:

(B) $|B_{\lambda+1,\lambda+p}| > 0$, anders geschrieben: $|A_{\lambda,\lambda+p}| > 0 \quad (\lambda = 0, 1, \ldots (p-2))$.

[1]) Aus dieser Definition ergeben sich bei ganz beliebigen a_ν, b_ν die Beziehungen:

(a) $$A_{\lambda,\lambda+\varrho} = a_{\lambda+1} B_{\lambda+1,\lambda+\varrho}$$

(b) $$\begin{cases} A_{\lambda+\varrho} = A_\lambda B_{\lambda,\lambda+\varrho} + A_{\lambda-1} A_{\lambda,\lambda+\varrho} \\ B_{\lambda+\varrho} = B_\lambda B_{\lambda,\lambda+\varrho} + B_{\lambda-1} A_{\lambda,\lambda+\varrho} \end{cases}$$

(c) $$\begin{aligned} A_\lambda B_{\lambda+\varrho} - A_{\lambda+\varrho} B_\lambda &= (A_\lambda B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_\lambda) A_{\lambda,\lambda+\varrho} \\ &= (-1)^{\lambda-1} \cdot a_1 \ldots a_\lambda \cdot A_{\lambda,\lambda+\varrho}. \end{aligned}$$

Ferner im Falle einer p gliedrigen Periodizität:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\lambda+1}^{\lambda+\varrho} \equiv \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\lambda+1+p}^{\lambda+\varrho+p},$$

also:

(d) $$\begin{cases} A_{\lambda,\lambda+\varrho} = A_{\lambda+p,\lambda+\varrho+p} \\ B_{\lambda,\lambda+\varrho} = B_{\lambda+p,\lambda+\varrho+p} \end{cases}.$$

2. Wir nehmen von jetzt ab ein für allemal an, daß die Bedingung (A) erfüllt sei. Die quadratische Gleichung (I) besitzt dann die beiden im allgemeinen verschiedenen Wurzeln:

$$(5\,a) \qquad x = \frac{1}{2\,B_{p-1}}\,(A_{p-1} - B_p \pm \sqrt{D})$$

bzw. in dem besonderen Falle $D = 0$ die daraus hervorgehende Doppelwurzel:

$$(5\,b) \qquad x = \frac{1}{2\,B_{p-1}}\,(A_{p-1} - B_p),$$

wo:

$$(6) \qquad \begin{cases} D = (A_{p-1} - B_p)^2 + 4\,A_p\,B_{p-1} \\ \quad = (A_{p-1} + B_p)^2 - 4\,(A_{p-1}\,B_p - A_p\,B_{p-1}) \\ \quad = S^2 - 4\,P, \end{cases}$$

wenn gesetzt wird:

$$(7) \qquad \begin{cases} S = A_{p-1} + B_p \\ P = A_{p-1}\,B_p - A_p\,B_{p-1} = (-1)^p \cdot a_1\,a_2 \ldots a_p. \end{cases}$$

Es soll nun zunächst festgestellt werden, in welcher Weise die Bedingungen (B) sich mit Hilfe der Wurzeln ausdrücken lassen.

Für $\lambda = 0$ besitzt die Bedingung (B), wegen: $A_{0,p} \equiv A_p$, die einfache Form:

$$|A_p| > 0$$

und ist also gleichbedeutend damit, daß keine der Wurzeln x den Wert Null hat.

Um sodann den allgemeinen Fall $\lambda \geqq 1$ zu erledigen, werde angenommen, daß für irgend ein $\lambda > 1$ die Bedingung (B) nicht erfüllt sei, daß also:

$$(8) \qquad A_{\lambda,\,\lambda+p} = 0.$$

Mit Hilfe der Formel (s. Gl. (c) in Fußn. 1) der vorigen Seite):

$$A_\lambda\,B_{\lambda+p} - A_{\lambda+p}\,B_\lambda = (-1)^{\lambda-1} \cdot a_1 \ldots a_\lambda \cdot A_{\lambda,\,\lambda+p}$$

läßt sich diese Bedingung durch die folgende ersetzen:

$$A_\lambda\,B_{\lambda+p} - A_{\lambda+p}\,B_\lambda = 0$$

und, wegen (s. Gl. (3) für $\mu = 1$, $\varrho = \lambda$):

$$(9) \qquad \begin{cases} A_{\lambda+p} = B_\lambda A_p + A_\lambda A_{p-1} \\ B_{\lambda+p} = B_\lambda B_p + A_\lambda B_{p-1}, \end{cases}$$

auch durch die folgende:

$$(10) \qquad A_\lambda (B_\lambda B_p + A_\lambda B_{p-1}) - B_\lambda (B_\lambda A_p + A_\lambda A_{p-1}) = 0,$$

anders geordnet und durch B_λ^2 dividiert[1]):

$$(11) \qquad B_{p-1} \left(\frac{A_\lambda}{B_\lambda}\right)^2 - \left(A_{p-1} - B_p\right) \frac{A_\lambda}{B_\lambda} - A_p = 0,$$

d. h. die quadratische Gleichung (I) besitzt in diesem Falle die Wurzel: $x = \frac{A_\lambda}{B_\lambda}$, so daß also:

$$(12) \qquad A_\lambda - B_\lambda x = 0.$$

Da man (wegen: $|a_1 \ldots a_\lambda| > 0$) durch Umkehrung dieser Schlußfolge von Gl. (12) auch wieder zu Gl. (8) gelangen kann und die Aussage, daß die Gleichung (I) keine Wurzel $x = 0$ besitzen soll, sich auch in die Form setzen läßt:

$$|A_0 - B_0 x| > 0 \quad (\text{wegen: } A_0 = 0,\ B_0 = 1),$$

so ergibt sich:

Die Bedingungen (B) sind vollkommen *äquivalent* mit den folgenden:

(B′) $|A_\lambda - B_\lambda x| > 0$ für: $\lambda = 0, 1, \ldots (p-2)$,

wo x *jede* Wurzel der quadratischen Gleichung (I) bedeutet.

Hierzu sei noch bemerkt, daß die Ungleichung (B′) auch noch für $\lambda = p - 1$ stets von selbst erfüllt ist.

---

[1]) Unter der Voraussetzung (8) ist stets: $|B_\lambda| > 0$. Denn für $B_\lambda = 0$ würde Gl. (10) die Form annehmen:

$$A_\lambda^2 B_{p-1} = 0,$$

es müßte also (wegen: $|B_{p-1}| > 0$)

$$A_\lambda = 0$$

sein, was unmöglich ist, da (infolge der Voraussetzung: $|a_\nu| > 0$) A_λ und B_λ niemals gleichzeitig verschwinden können.

Denn aus Gl. (I) folgt:

$$A_p - B_p x = -x(A_{p-1} - B_{p-1}x), \tag{13}$$

so daß aus der Annahme:

$$A_{p-1} - B_{p-1}x = 0$$

folgen würde:

$$A_p - B_p x = 0$$

und daher:

$$A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p = (-1)^{p-1} \cdot a_1 \dots a_p = 0,$$

was wieder wegen $|a_\nu| > 0$, unmöglich ist.

3. Um die Konvergenz des Kettenbruches, also die Existenz von $\lim\limits_{\nu \to \infty} \frac{A_\nu}{B_\nu}$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, eines von λ unabhängigen $\lim\limits_{\mu \to \infty} \frac{A_{\lambda+\mu p}}{B_{\lambda+\mu p}}$ $(\lambda = 0, 1, \dots (p-1)$ bei passender Hinzufügung weiterer Bedingungen feststellen zu können, entwickeln wir zunächst eine hierfür zweckmäßige Rekursionsformel. Aus (9) folgt, wenn $\lambda + p = \nu$ gesetzt wird:

$$\left\{\begin{array}{l} A_\nu = B_{\nu-p} A_p + A_{\nu-p} A_{p-1} \\ B_\nu = B_{\nu-p} B_p + A_{\nu-p} B_{p-1} \end{array}\right. \quad (\nu \geqq p) \tag{14}$$

und daher für jedes beliebige x:

$$A_\nu - B_\nu x = B_{\nu-p}(A_p - B_p x) + A_{\nu-p}(A_{p-1} - B_{p-1}x),$$

also, wenn wieder x eine beliebige Wurzel der Gleichung (I) bedeutet, mit Benützung von Gl. (13):

$$A_\nu - B_\nu x = (A_{p-1} - B_{p-1}x)(A_{\nu-p} - B_{\nu-p}x). \tag{15}$$

Setzt man hier $\nu = \lambda + \mu p$ (wo: $\lambda = 0, 1, \dots (p-1)$; $\mu = 1, 2, 3, \dots$), so ergibt sich die folgende für die weiteren Betrachtungen grundlegende Rekursionsformel:

$$\begin{array}{c} A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} x \\ = (A_{p-1} - B_{p-1}x)(A_{\lambda+(\mu-1)p} - B_{\lambda+(\mu-1)p} x), \end{array} \tag{II}$$

welche zunächst durch vollständige Induktion bereits so viel erkennen läßt, daß im Falle $A_\lambda - B_\lambda x \neq 0$ bzw. $= 0$ für

irgend ein bestimmtes λ aus der Reihe $0, 1, \ldots (p-1)$[1]) die entsprechende Beziehung auch für $A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}\, x$ bei beliebigem $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ Geltung hat.

4. Wir behandeln zuerst als den einfacher zu erledigenden, den besonderen Fall:

$$D = 0 \text{ (d. h.: } (A_{p-1} - B_p)^2 = -4\, A_p B_{p-1}, \quad \text{also: } S^2 = 4\, P \neq 0$$

in welchem die quadratische Gleichung (I) die Doppelwurzel:

$$x = \frac{1}{2\, B_{p-1}} (A_{p-1} - B_p) \tag{16}$$

besitzt. Da alsdann:

$$A_{p-1} - B_{p-1}\, x = A_{p-1} - \tfrac{1}{2} (A_{p-1} - B_p) = \tfrac{1}{2}\, S \neq 0, \tag{17}$$

so nimmt die Beziehung (15) die Form an:

$$A_\nu - B_\nu\, x = \tfrac{1}{2}\, S (A_{\nu-p} - B_{\nu-p}\, x).$$

Ist hierbei: $A_\nu - B_\nu\, x \neq 0$, so folgt weiter:

$$\frac{B_\nu}{A_\nu - B_\nu\, x} = \frac{2\, B_\nu}{S} \cdot \frac{1}{A_{\nu-p} - B_{\nu-p}\, x}, \tag{18}$$

und daher:

$$\frac{B_\nu}{A_\nu - B_\nu\, x} - \frac{B_{\nu-p}}{A_{\nu-p} - B_{\nu-p} x} = \frac{1}{S} (2\, B_\nu - S\, B_{\nu-p}) \cdot \frac{1}{A_{\nu-p} - B_{\nu-p}\, x}$$

$$= \frac{1}{S} (2\, B_\nu - S B_{\nu-p}) \cdot \frac{2\, B_{p-1}}{2\, A_{\nu-p} B_{p-1} - B_{\nu-p} (A_{p-1} - B_p)} \text{ (s. Gl. (16))}$$

$$= \frac{2\, B_{p-1}}{S} \cdot \frac{2\, B_\nu - S\, B_{\nu-p}}{2 (A_{\nu-p} B_{p-1} + B_{\nu-p} B_p) - S\, B_{\nu-p}}$$

also, wegen:

$$A_{\nu-p} B_{p-1} + B_{\nu-p} B_p = B_\nu \text{ (s. Gl. (14))},$$

schließlich:

$$\frac{B_\nu}{A_\nu - B_\nu\, x} - \frac{B_{\nu-p}}{A_{\nu-p} - B_{\nu-p}\, x} = \frac{2\, B_{p-1}}{S}. \tag{19}$$

---

[1]) Für $\lambda = 0$ nimmt die betreffende Voraussetzung die Form an: $x \neq 0$ bzw. $= 0$.

Setzt man hier wieder $\nu = \lambda + \mu p$, so ergibt sich als Ergänzung zu der Rekursionsformel (II) die folgende:

$$\text{(IIa)} \quad \frac{B_{\lambda+\mu p}}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}\,x} - \frac{B_{\lambda+(\mu-1)p}}{A_{\lambda+(\mu-1)p} - B_{\lambda+(\mu-1)p}\,x} = \frac{2B_{p-1}}{S},$$

auf Grund der an die Rekursionsformel (II) geknüpften Bemerkung gültig für jedes λ, für welches: $|A_\lambda - B_\lambda x| > 0$. Ersetzt man μ sukzessive durch $\mu-1$, $\mu-2, \cdots 1$, so folgt durch Addition der resultierenden Gleichungen zu Gl. (IIa):

$$\text{(20)} \qquad \frac{B_{\lambda+\mu p}}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}\,x} - \frac{B_\lambda}{A_\lambda - B_\lambda x} = \mu \cdot \frac{2B_{p-1}}{S}$$

und daher:

$$\text{(21)} \qquad \lim_{\mu\to\infty} \frac{B_{\lambda+\mu p}}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}\,x} = \infty.$$

Daraus geht insbesondere hervor, daß (unter der Voraussetzung $A_\lambda - B_\lambda x \neq 0$) $B_{\lambda+\mu p}$ nicht für unendlich viele μ verschwinden kann, da ja im Falle: $B_{\lambda+\mu p} = 0$ stets: $A_{\lambda+\mu p} \neq 0$ und somit der obige Quotient unendlich oft den Wert Null annehmen würde. Setzt man also allgemein: $K_\nu = \frac{A_\nu}{B_\nu}$, so läßt sich Gl. (21) auch in die folgende umformen:

$$\text{(22)} \qquad \lim_{\mu\to\infty} \frac{1}{K_{\lambda+\mu p} - x} = \infty,$$

und man findet somit schließlich:

$$\text{(23)} \qquad \lim_{\mu\to\infty} K_{\lambda+\mu p} = x \left(= \frac{1}{2B_{p-1}} (A_{p-1} - B_p) \right)$$

für jedes λ, für welches: $|A_\lambda - B_\lambda x| > 0$. Ist diese Bedingung, die ja, wie oben bemerkt wurde, für $\lambda = p-1$ schon von selbst erfüllt ist, auch für jedes $\lambda = 0, 1, \cdots (p-2)$ erfüllt, mit anderen Worten bestehen ausnahmslos die Bedingungen (B′) oder auch die damit gleichwertigen Bedingungen (B), so folgt aus der an die Rekursionsformel (II) geknüpften Bemerkung, daß $|A_\nu - B_\nu x| > 0$ für jedes ν, mithin konvergiert der Kettenbruch gegen den Wert x. Und zwar ist die

Konvergenz eine unbedingte, weil ja andernfalls der Wert x des Kettenbruches irgend einem Näherungsbruch $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ gleich sein müßte,[1]) was wegen $|A_\nu - B_\nu x| > 0$ unmöglich ist.

Indessen bleibt die Konvergenz noch erhalten, wenn die Bedingungen (B') bzw. (B) nicht ausnahmslos erfüllt sind. Ist nämlich für ein oder mehrere $\lambda = l$: $A_l - B_l x = 0$,[2]) so folgt zunächst aus der Rekursionsformel (II), daß dann auch: $A_{l+\mu p} - B_{l+\mu p}\, x = 0$ für jedes $\mu = 1, 2, 3, \cdots$ sein muß. Da $A_{l+\mu p}$, $B_{l+\mu p}$ nicht gleichzeitig verschwinden können, so ist diese Beziehung (auch für $\mu = 0$) nur möglich, wenn: $|B_{l+\mu p}| > 0$, und kann daher durch die folgende ersetzt werden:

(24 a) $$K_{l+\mu p} = x \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots),$$

so daß auch:

(24 b) $$\lim_{\mu \to \infty} K_{l+\mu p} = x.$$

Das frühere Ergebnis erleidet also nur insofern eine Änderung, als die Konvergenz mit Rücksicht auf Gl. (24 a) nur noch eine bedingte ist.

Hiernach findet man:

Ist $D = 0$, so ist die Bedingung:

(A) $$|B_{p-1}| > 0$$

notwendig und *hinreichend* für die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\overline{\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_p}{b_p}}\right]$ und zwar ist alsdann

---

[1]) Vgl. diese Berichte, Bd. 28 (1898), S. 306.

[2]) Man bemerke, daß dann keinesfalls auch:
$$A_{l+1} - B_{l+1}\, x = 0$$
sein könnte, da ja aus den beiden fraglichen Beziehungen folgen würde:
$$A_l\, B_{l+1} - A_{l+1}\, B_l = 0,$$
was, wegen $|a_\nu| > 0$, unmöglich ist.

In dem besonderen Falle $\lambda = 0$ hat man: $x = 0$, $A_p = 0$. In der Tat kann ja ein gegen Null konvergierender Kettenbruch (ohne additives Anfangsglied) immer nur bedingt konvergieren.

sein Wert gleich der Doppelwurzel x der quadratischen Gleichung (I), also:

$$\left[\overline{\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_p}{b_p}}\right] = x = \frac{1}{2 B_{p-1}} (A_{p-1} - B_p).$$

Die Konvergenz ist dann und nur dann eine *unbedingte*, wenn die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(B)}\ |A_{\lambda,\lambda+p}| > 0 \text{ oder auch: } |B_{\lambda+1,\lambda+p}| > 0 \\ \text{bzw. (B}')\qquad |A_\lambda - B_\lambda x| > 0\end{array}\right\}(\lambda = 0, 1, \cdots (p-2))$$

ausnahmslos erfüllt sind.

5. Zur Behandlung des allgemeinen Falles:

$$|D| > 0$$

reduzieren wir den zweiten Faktor der rechten Seite der Rekursionsformel (II) durch deren fortgesetzte Anwendung auf $A_\lambda - B_\lambda x$, so daß sich ergibt:

$$(25)\qquad A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}\, x = (A_{p-1} - B_{p-1}\, x)^\mu \cdot (A_\lambda - B_\lambda x),$$

und hieraus folgt, wenn man mit x_1, x_2 die beiden nunmehr verschiedenen Wurzeln der quadratischen Gleichung (I) bezeichnet, unter der Voraussetzung: $|A_\lambda - B_\lambda x_2| > 0$, daß:

$$(26)\qquad \frac{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}\, x_1}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}\, x_2} = M^\mu \cdot \frac{A_\lambda - B_\lambda x_1}{A_\lambda - B_\lambda x_2},$$

wo:

$$(27)\qquad M = \frac{A_{p-1} - B_{p-1}\, x_1}{A_{p-1} - B_{p-1}\, x_2}.$$

Soll nun der Kettenbruch überhaupt konvergieren, so muß zum mindesten für hinlänglich große μ Gl. (26) sich in die Form setzen lassen:

$$(28)\qquad \frac{K_{\lambda+\mu p} - x_1}{K_{\lambda+\mu p} - x_2} = M^\mu \cdot \frac{A_\lambda - B_\lambda x_1}{A_\lambda - B_\lambda x_2}$$

und sodann einen bestimmten, von der Wahl des λ unabhängigen $\lim\limits_{\mu\to\infty} K_{\lambda+\mu p}$ liefern, was offenbar nur möglich ist, wenn:

$$\lim_{\mu \to \infty} M^{\mu} = 0 \quad \text{oder} \quad = \infty,$$

d. h. wenn:

$$(29) \qquad |M| \equiv \left| \frac{A_{p-1} - B_{p-1} x_1}{A_{p-1} - B_{p-1} x_2} \right| \neq 1.$$

Diese Bedingung ist also jedenfalls eine weitere notwendige für die Konvergenz des Kettenbruches. Ist sie aber erfüllt, so läßt sie sich sofort ohne jede weitere Beschränkung der Allgemeinheit durch die scheinbar engere ersetzen:

$$(C') \qquad |M| \equiv \left| \frac{A_{p-1} - B_{p-1} x_1}{A_{p-1} - B_{p-1} x_2} \right| < 1,$$

da es freisteht, falls die Voraussetzung (29) erfüllt ist, unter x_1 ein für allemal diejenige Wurzel der Gleichung (I) zu verstehen, welche dann durch die Bedingung (C') eindeutig charakterisiert ist.

Es läßt sich nun zunächst zeigen, daß die soeben als notwendig für die Konvergenz des Kettenbruches erkannte Bedingung (29) bzw. (C') in Verbindung mit (A) und (B) bzw. (B') sich als hinreichend für die unbedingte Konvergenz erweist. Unter den genannten Bedingungen folgt nämlich zunächst aus Gl. (26):

$$(30) \quad \lim_{\mu \to \infty} \frac{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} x_1}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} x_2} = 0 \quad \text{für: } \lambda = 0, 1, \cdots (p-1),$$

was wiederum nur möglich ist, wenn für hinlänglich große μ durchweg: $|B_{\lambda+\mu p}| > 0$. Denn wäre $B_{\lambda+\mu p} = 0$ für unendlich viele $\lambda + \mu p$ (wobei dann jedesmal: $|A_{\lambda+\mu p}| > 0$), so würde der in Gl. (30) auftretende Quotient unendlich oft den Wert 1 annehmen. In Folge dessen läßt sich aber die Gl. (30) durch die folgende ersetzen:

$$(31) \quad \frac{K_{\lambda+\mu p} - x_1}{K_{\lambda+\mu p} - x_2} = q_{\lambda,\mu}, \quad \text{wo: } \lim_{\mu \to \infty} q_{\lambda,\mu} = 0 \; (\lambda = 0, 1, \cdots (p-1))$$

so daß sich ergibt:

$$K_{\lambda+\mu p}(1 - q_{\lambda,\mu}) = x_1 - x_2 q_{\lambda,\mu}$$

und daher:

(32) $$\lim_{\mu \to \infty} K_{\lambda + \mu p} = x_1 \quad (\lambda = 0, 1, \cdots (p-1)),$$

d. h. schließlich:

(33) $$\left[\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_p}{b_p}\right] = x_1 .$$

Diese Konvergenz ist dann aber eine unbedingte, da ja auf Grund der Voraussetzung $|A_\lambda - B_\lambda x| > 0$ für $\lambda = 0, 1, \cdots (p-2)$, ebenso für $\lambda = (p-1)$ und daher mit Benützung der Rekursionsformel (II) auch $A_{\lambda + \mu p} - B_{\lambda + \mu p} x_1$ durchweg von Null verschieden, also für jedes n: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = x_1 \mp \frac{A_n}{B_n}$ ist.

Diese letzte Bemerkung führt unmittelbar zu der Erkenntnis, daß die Konvergenz des Kettenbruches gegen den Wert x_1 noch als eine bedingte — ganz analog, wie in dem zuvor betrachteten Falle $D = 0$ — erhalten bleibt, wenn für gewisse $\lambda = l$ die Beziehung besteht: $A_l - B_l x_1 = 0$. Denn daraus folgt wieder auf Grund der Rekursionsformel (II), daß dann allgemein: $A_{l + \mu p} - B_{l + \mu p} x_1 = 0$, also: $K_{l + \mu p} = x_1$ für: $\mu = 0, 1, 2, \cdots$, während für alle von l verschiedenen λ die frühere Betrachtung gültig bleibt, sodaß also schließlich wieder: $\lim_{\nu \to \infty} K_\nu = x_1$, die Konvergenz, wegen $K_{l + \mu p} = x_1$, jedoch nur eine bedingte ist.

Bestehen dagegen für gewisse $\lambda = l$ in der Weise Ausnahmen von den Bedingungen (B′), daß: $A_l - B_l x_2 = 0$, so besitzen alle Näherungsbrüche von der Form: $K_{l + \mu p} (\mu = 0, 1, 2, \cdots)$ den Wert x_2 und konvergieren daher auch für $\mu \to \infty$ gegen x_2, während alle übrigen den Grenzwert x_1 liefern. Der Kettenbruch oszilliert also in diesem Falle zwischen den zwei Werten x_1 und x_2 (sogenannte Thielesche Oszillation).

Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich in folgender Weise zusammenfassen (wobei wir aus einem Grunde, der bald ersichtlich werden wird, von der Möglichkeit, statt der Bedingungen (B′) die Bedingungen (B) einzuführen, vorläufig absehen):

Ist $|D|>0$ und werden mit x_1, x_2 die (in diesem Falle verschiedenen) Wurzeln der quadratischen Gleichung (I) bezeichnet, so sind für die *unbedingte* Konvergenz des periodischen Kettenbruches: $\overline{\left[\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_p}{b_p}\right]}$ die folgenden Bedingungen *notwendig* und *hinreichend.*

(A) $\qquad |B_{p-1}| > 0$

(B′) $\left\{\begin{array}{l} 1)\ |A_\lambda - B_\lambda x_1| > 0 \\ 2)\ |A_\lambda - B_\lambda x_2| > 0 \end{array}\right. \quad (\lambda = 0, 1, \cdots (p-2))$

(C′) $\qquad |A_{p-1} - B_{p-1} x_1| > |A_{p-1} - B_{p-1} x_2|$.

Sein Wert ist gleich x_1.

Die Bedingungen (A), (B′, 2) und (C′) sind auch für *bedingte* Konvergenz des Kettenbruches *notwendig.* Eine solche und zwar gleichfalls gegen den Wert x_1 findet statt, wenn die Bedingungen (B′, 1) nur teilweise erfüllt sind, wenn also für mindestens *ein* $\lambda = l$ die Beziehung besteht: $A_l - B_l x_1 = 0$.

Besteht dagegen außer der Voraussetzung (A) für mindestens *ein* $\lambda = l$ die Beziehung: $A_l - B_l x_2 = 0$, so *oszilliert* der Kettenbruch zwischen den beiden Werten x_1, x_2 (und zwar unabhängig davon, ob die Bedingungen (B′, 1) ausnahmslos oder nur teilweise erfüllt sind).

6. Das vorstehende, rein formal völlig befriedigend erscheinende Resultat leidet, wie schon in der Einleitung angedeutet wurde, insofern an einer merklichen Unvollkommenheit, als die Bedingungen (B′), (C′) trotz ihrer äußerlich einfachen Fassung wegen ihrer Abhängigkeit von Irrationalitäten x_1, x_2 doch ziemlich verwickelt sind und ihre praktische Anwendung sich recht umständlich gestaltet. Gilt dies schon von der Einzelbedingung (C′), so noch in wesentlich erhöhtem Maße von dem System der Bedingungen (B′). Zwar läßt sich, wie

schon in Nr. 2 gezeigt wurde, jedes Paar von Bedingungen: $|A_\lambda - B_\lambda x_1| > 0$, $|A_\lambda - B_\lambda x_2| > 0$ durch die wesentlich einfachere entsprechende Bedingung (B): $|A_{\lambda,\lambda+p}| > 0$ ersetzen. Ist nun aber für ein oder mehrere $\lambda = l$: $A_{l,l+p} = 0$, so bleibt noch die Frage offen, welche Zusatzbedingungen erforderlich sind, um sicher zu stellen, daß in dem betreffenden Falle: $A_l - B_l x_1 = 0$ und nicht: $A_l - B_l x_2 = 0$, mithin noch bedingte Konvergenz gegen den Wert x_1 vorhanden ist.

Was nun zunächst die Bedingung (C′) betrifft, so habe ich in der oben (S. 221, Fußnote 2) erwähnten Arbeit gezeigt, daß sie dann und nur dann erfüllbar ist, wenn die (eine Umformung von Ungl. (29) darstellende) Beziehung besteht[1]):

$$\left|\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right)\right| > 0,$$

welche sich auch durch die folgende, nur rationale Verbindungen der a_ν, b_ν enthaltende ersetzen läßt[2]):

$$\text{(C)} \qquad \frac{S^2}{4P} \neq \vartheta, \text{ wo } \vartheta \text{ reell und } 0 \leq \vartheta < 1.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so läßt sich $\varepsilon = \pm 1$ eindeutig so bestimmen, daß gemäß der Bedingung (C′):

$$|A_{p-1} - B_{p-1} x_1| < |A_{p-1} - B_{p-1} x_2|,$$

wenn gesetzt wird:

$$\text{(34)} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2B_{p-1}}(A_{p-1} - B_p + \varepsilon\sqrt{D}) \\ x_2 = \dfrac{1}{2B_{p-1}}(A_{p-1} - B_p - \varepsilon\sqrt{D}) \end{cases}$$

und $\sqrt{D}$ den Hauptwert der Quadratwurzel vorstellt.

---

[1]) A. a. O. S. 470, Formel (A).

[2]) Vgl. a. a. O. S. 471, Gl. (74a), wo die Beziehung:

$$S^2 = 4\vartheta P \,(0 \leq \vartheta < 1)$$

als Divergenz-Bedingung angegeben ist. Dieses Divergenzkriterium findet sich in etwas umständlicherer Herleitung schon bei Stolz: Innsbr. Berichte 1887/88, S. XVIII.

Um dieser Bestimmung von x_1 eine noch etwas handlichere, insbesondere kürzer in Worte zu fassende Form zu geben, setzen wir:

$$(35)\qquad \begin{cases} A_{p-1} - B_{p-1} x_1 = z_1 \\ A_{p-1} - B_{p-1} x_2 = z_2, \end{cases}$$

also:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2 A_{p-1} - B_{p-1}(x_1 + x_2) \\ &= 2 A_{p-1} - (A_{p-1} - B_p) = S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= A_{p-1}^2 - A_{p-1} B_{p-1}(x_1 + x_2) + B_{p-1}^2 x_1 x_2 \\ &= A_{p-1}^2 - A_{p-1}(A_{p-1} - B_p) - B_{p-1} A_p \\ &= A_{p-1} B_p - A_p B_{p-1} = P. \end{aligned}$$

Hiernach sind z_1, z_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung[1]):

$$(\mathrm{III})\qquad z^2 - Sz + P = 0$$

(welche dieselbe Diskriminante $D = S^2 - 4P$ besitzt, wie die quadratische Gleichung (I)), und die Bedingung (C′) nimmt alsdann die einfache Form $|z_1| < |z_2|$ an, sie läßt sich also ersetzen durch die Bedingung (C) mit dem Zusatze:

$$(36)\qquad x_1 = \frac{A_{p-1} - z_1}{B_{p-1}},$$

wo z_1 die absolut genommen kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung (III) bedeutet[2]).

7. Um jetzt festzustellen, welche Bedingungen (immer unter der Voraussetzung $|B_{p-1}| > 0$) im Falle: $A_{l,l+p} = 0$ noch erfüllt sein müssen, um die ausnahmslose Existenz der Bedingungen (B', 2) und damit die Möglichkeit der Konvergenz des Kettenbruches zu sichern, wollen wir zunächst annehmen, es bestehe die obige Voraussetzung ausschließlich für $l = 0$, so daß also:

---

[1]) Es ist das dieselbe quadratische Gleichung, zu welcher Herr von Pidoll behufs Auflösung einer gewissen Rekursionsformel gelangt (s. a. a. O. S. 21, Gl. (12)).

[2]) Daß die Wurzeln dieser Gleichung allemal ungleiche Absolutwerte besitzen, wird ja durch die Bedingung (C) gesichert.

(37a) $$A_{0,p} \equiv A_p = 0,$$
dagegen: $A_{\lambda,\lambda+p} > 0$ für $\lambda = 1, 2, \ldots (p-2)$.

Soll dann der Kettenbruch noch (bedingt) konvergieren, so muß

$$A_0 - B_0 x_1 = 0, \text{ also: } x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

werden. Die hierzu notwendige und hinreichende Bedingung: $|z_1| < |z_2|$ nimmt alsdann, wegen:

$$z_1 = A_{p-1} - B_{p-1} x_1 = A_{p-1}, \quad z_2 = A_{p-1} - B_{p-1} x_2 = B_p$$

die Form an:

(38) $$|A_{p-1}| < B_p$$ [1].

Man kann sich überdies leicht überzeugen, daß dann in der Tat der Kettenbruch gegen den Wert $x_1 = 0$ (und schon deshalb nur bedingt) konvergiert.

Aus der Rekursionsformel (II) folgt nämlich für $x = x_1 = 0$ und $\lambda = 0$:

$$A_{\mu p} = A_{p-1} A_{(\mu-1)p} = \cdots = 0, \text{ wegen: } A_p = 0,$$

also auch:

$$K_{\mu p} = 0 \text{ für: } \mu = 1, 2, 3, \ldots,$$

während im übrigen, wegen: $|M| \equiv \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1$, sich ergibt:

$$\lim_{\mu \to \infty} K_{\lambda + \mu p} = x_1 = 0 \text{ für: } \lambda = 1, 2, \ldots (p-1).$$

Wird jetzt ferner angenommen, daß außer der Voraussetzung (37a) auch noch für ein oder mehrere $\lambda = l_\nu > 0$ die entsprechende Beziehung:

(37b) $A_{l_\nu, l_\nu + p} = 0$ (etwa für $\nu = 1, \ldots n$, wo $n \geq 1$)

besteht, so muß zunächst, wenn überhaupt Konvergenz gegen den Wert $x_1 = 0$ möglich sein soll, wieder die Bedingung (38) erfüllt sein; außerdem aber, damit die Voraussetzung (37b)

[1] Die Bedingung (C) ist also in der Bedingung (38) schon implicite enthalten.

die Beziehung: $A_{l_\nu} - B_{l_\nu} x_1 = 0$ zur Folge hat, wegen $x_1 = 0$, noch die folgende:

(39) $$A_{l_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots n).$$

Auf Grund dieser Beziehung folgt dann wieder aus der Rekursionsformel (II), S. 228, daß:

$$K_{l_\nu + \mu p} = 0 \text{ für: } \mu = 1, 2, 3, \ldots,$$

während für alle von 0 und l_ν verschiedenen λ, wie bisher:

$$\lim_{\mu \to \infty} K_{\lambda + \mu p} = x_1 = 0$$

wird, der Kettenbruch also wieder gegen den Wert $x_1 = 0$ konvergiert.

Diese Ergebnisse lassen sich ohne Schwierigkeit auf den Fall übertragen, daß an die Stelle der Voraussetzung (37 a) eine solche von der Form:

(40 a) $$A_{l, l+p} = 0$$

tritt, und zwar zunächst für ein einziges $l > 0$. Soll dann die hieraus für eine der beiden Gleichungswurzeln x folgende Beziehung:

$$A_l - B_l x = 0$$

für $x = x_1$ befriedigt werden und sodann der Kettenbruch gegen den Wert x_1, d. h. gegen $\frac{A_l}{B_l}$ konvergieren, so ist dafür notwendig und hinreichend, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{l+1}^{\infty}$ gegen Null konvergiert. Da die hierzu notwendige Bedingung: $A_{l, l+p} = 0$ (welche ja für diesen Kettenbruch genau dieselbe Rolle spielt, wie zuvor die Bedingung: $A_{0, p} \equiv A_p = 0$ für den Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$) bereits erfüllt ist, so zeigt die Vergleichung mit (38), daß als notwendig und hinreichend noch die (für $l = 0$ mit (38) zusammenfallende) Bedingung:

(41) $$|A_{l, l+p-1}| < |B_{l, l+p}|$$

hinzutreten muß, damit der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{l+1}^\infty$ gegen Null, also $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ gegen den Wert $x_1 = \frac{A_l}{B_l}$ (bedingt) konvergiert.

Wird jetzt wiederum angenommen, daß außer der Voraussetzung (40a) auch für ein oder mehrere $l_\nu > l$ die entsprechende Beziehung besteht, also:

(40b) $$A_{l_\nu, l_\nu + p} = 0 \quad (l_\nu > l),$$

so tritt an die Stelle der im Falle $l = 0$ gefundenen Zusatzbedingung (39) (nämlich: $A_{l_\nu} \equiv A_{0, l_\nu} = 0$) offenbar die durch Vertauschung des Anfangsindex 0 mit l daraus hervorgehende, also:

(42) $$A_{l, l_\nu} = 0,$$

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für $\mu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$K_{l, l_\nu + \mu p} = 0, \text{ also: } K_{l_\nu + \mu p} = \frac{A_1}{B_1} = x_1,$$

während wieder für alle von l und l_ν verschiedenen λ:

$$\lim_{\mu \to \infty} K_{l, \lambda + \mu p} = 0, \text{ also: } \lim_{\mu \to \infty} K_{\lambda + \mu p} = \frac{A_l}{B_l} = x_1$$

wird, der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{l+1}^\infty$ also schließlich gegen Null und $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ gegen den Wert $\frac{A_1}{B_1} = x_1$ konvergiert.

Fassen wir endlich noch den Fall ins Auge, daß für ein einziges $l \geqq 0$ wieder die Beziehung (37a) bzw. (40a) besteht, also:

$$A_{l, l+p} = 0,$$

dagegen an die Stelle der Bedingung (38) bzw. (41) die entgegengesetzte tritt, d. h.:

$$|A_{l, l+p-1}| > |B_{l, l+p}| \qquad (l \geqq 0),$$

so hätte man:

$$A_l - B_l x_2 = 0,$$

und es muß also in diesem Falle die oben bereits beschriebene besondere Art der Oscillation des Kettenbruches zwischen den Werten x_1 und x_2 eintreten.

Hieran wird nichts wesentliches geändert, wenn auch noch für ein oder mehrere $l_\nu > l$:

$$A_{l_\nu, l_\nu + p} = 0,$$

und zwar selbst dann nicht, wenn:

$$|A_{l, l+p-1}| < |B_{l, l+p}|,$$

jedoch mindestens eine der Bedingungen (42) nicht erfüllt ist.

Somit läßt sich jetzt das am Schlusse von Nr. 5 ausgesprochene Resultat in folgender Weise umgestalten:

Ist:

$$|D| \equiv |(A_{p-1} - B_p)^2 + 4\, A_p B_{p-1}| > 0,$$

so sind für die *unbedingte* Konvergenz des periodischen Kettenbruches $\left[\overline{\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}}\right]$ die folgenden Bedingungen *notwendig* und *hinreichend:*

(A) $$|B_{p-1}| > 0$$

(B) $$|A_{\lambda, \lambda+p}| > 0 \quad \text{für: } \lambda = 0, 1, \ldots (p-2)$$

(C) $$\frac{S^2}{4\,P} \neq \vartheta, \quad \text{wo: } \vartheta \text{ reell und: } 0 \leqq \vartheta < 1,$$

$$S = A_{p-1} + B_p, \quad P = (-1)^p a_1 \ldots a_p.$$

Sind dieselben erfüllt, so *konvergiert* der Kettenbruch gegen den Wert:

$$x_1 = \frac{1}{B_{p-1}} (A_{p-1} - z_1),$$

wo z_1 die absolut genommen kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$z^2 - Sz + P = 0$$

bedeutet.

Sind außer der Bedingung (A) die Bedingungen (B) bis auf eine einzige erfüllt, etwa:

$$A_{l,l+p} = 0 \quad (0 \leqq l \leqq p-2),$$

so *konvergiert* der Kettenbruch noch *bedingt* gegen den Wert x_1, wenn an die Stelle der Bedingung (C) die folgende tritt:

$$(C_1) \qquad |A_{l,l+p-1}| < |B_{l,l+p}| .$$

Das gleiche findet statt, wenn noch für ein oder mehrere $l_\nu > l$:

$$A_{l_\nu, l_\nu+p} = 0 \quad (\nu = 1 \text{ bzw. } \nu = 1, \ldots n),$$

sofern für jedes solche l_ν die Beziehung besteht:

$$(C_2) \qquad A_{l, l_\nu} = 0 \quad (\nu = 1 \text{ bzw. } \nu = 1, \ldots n).$$

Ist dagegen für ein einzelnes $l \geqq 0$:

$$(a) \qquad A_{l,l+p} = 0 \text{ und: } |A_{l,l+p-1}| > |B_{l,l+p}|,$$

so *oscilliert* der Kettenbruch in *der* Weise zwischen den beiden Werten x_1 und x_2, daß:

$$K_{l+\mu p} = x_2 \text{ für: } \mu = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\lim_{\mu \to \infty} K_{\lambda+\mu p} = x_1 \text{ für: } \lambda \neq l.$$

An diesem Ergebnisse wird nichts geändert, wenn für ein oder mehrere $l_\nu > l$:

$$(b) \qquad A_{l_\nu, l_\nu+p} = 0 \text{ und: } A_{l, l_\nu} = 0 \text{ (vgl. } (C_2)).$$

Ist indessen für irgend ein $\nu = m$:

$$(c) \qquad A_{l_m, l_m+p} = 0 \text{ und: } |A_{l, l_m}| > 0,$$

so tritt nur insofern eine Änderung ein, als dann auch:

$$K_{l_m+\mu p} = x_2 \text{ für: } \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

Und der Wert x_2 kommt *ausschließlich* in dieser *letzteren* Weise zum Vorschein, wenn an die Stelle der Beziehungen (a) die folgenden treten:

(d) $A_{l,l+p} = 0$ und: $|A_{l,l+p-1}| < |B_{l,l+p}|$.

In allen diesen letztgenannten, durch die Bedingungen (a)—(d) gekennzeichneten Fällen *oscilliert* also der Kettenbruch zwischen den beiden Werten x_1 und x_2 in *der* Weise, daß gewisse Näherungsbruchfolgen durchweg den Wert x_2, die übrigen den Wert oder Grenzwert x_1 liefern.

§ 2. Über ein Konvergenz-Kriterium für Kettenbrüche von der Form: $\left[\frac{1}{a_\nu + \beta_\nu i}\right]_1^\infty$.

1. Bezeichnet man mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ die Näherungsbrüche des unendlichen Kettenbruches $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo: $b_\nu = a_\nu + \beta_\nu i$, mit $\overline{B}_\nu$ die zu B_ν konjugierte Zahl, so folgt aus der Rekursionsformel:

$$B_{\nu+1} = b_{\nu+1} B_\nu + B_{\nu-1}$$

durch Multiplikation mit $\overline{B}_\nu$:

(1) $$B_{\nu+1}\overline{B}_\nu - \overline{B}_\nu B_{\nu-1} = b_{\nu+1} B_\nu \overline{B}_\nu = b_{\nu+1} |B_\nu|^2.$$

Setzt man sodann:

(2) $$\overline{B}_\nu B_{\nu-1} = \varrho_\nu - \sigma_\nu i, \text{ also: } B_\nu \overline{B}_{\nu-1} = \varrho_\nu + \sigma_\nu i,$$

so geht die Gleichung (1) in die folgende über:

$$\varrho_{\nu+1} + \sigma_{\nu+1} i - (\varrho_\nu - \sigma_\nu i) = (a_{\nu+1} + \beta_{\nu+1} i) \cdot |B_\nu|^2,$$

welche durch Trennung des reellen und imaginären die zwei Beziehungen liefert:

(3) $$\varrho_{\nu+1} - \varrho_\nu = a_{\nu+1} |B_\nu|^2, \quad \sigma_{\nu+1} + \sigma_\nu = \beta_{\nu+1} |B_\nu|^2.$$

Substituiert man in der ersten und der mit $(-1)^{\nu+1}$ multiplizierten zweiten dieser Gleichungen $\nu = 1, 2, \ldots (n-1)$,

so folgt durch Addition der resultierenden Gleichungen (mit Berücksichtigung von $\varrho_1 = \alpha_1 = \alpha_1 |B_0|^2$, $\sigma_1 = \beta_1 = \beta_1 |B_0|^2$):

$$(4)\quad \varrho_n = \sum_0^{n-1} {}^{\nu} \alpha_{\nu+1} |B_\nu|^2, \quad (-1)^n \sigma_n = \sum_0^{n-1} {}^{\nu} (-1)^{\nu+1} \cdot \beta_{\nu+1} |B_\nu|^2 \quad (n \geqq 1)$$

und durch Multiplikation der beiden Gleichungen (2):

$$(5)\qquad |B_\nu B_{\nu-1}|^2 = \varrho_\nu^2 + \sigma_\nu^2, \quad \text{also: } |B_\nu B_{\nu-1}| \begin{cases} \geqq \varrho_\nu \\ \geqq \sigma_\nu . \end{cases}$$

Ersetzt man ferner in der Rekursionsformel:

$$B_{n+1} = b_{n+1} B_n + B_{n-1}$$

jede darin vorkommende Zahl durch ihre konjugierte (wobei, analog wie oben, $\overline{b_{n+1}}$ die Konjugierte von b_{n+1} bezeichnen soll), so folgt:

$$\overline{B_{n+1}} = \overline{b_{n+1}}\, \overline{B_n} + \overline{B_{n-1}}$$

und durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} |B_{n+1}|^2 &= |b_{n+1}|^2 |B_n|^2 + |B_{n-1}|^2 + b_{n+1} B_n \overline{B_{n-1}} + \overline{b_{n+1}}\, \overline{B_n} B_{n-1} \\ &= |b_{n+1}|^2 |B_n|^2 + |B_{n-1}|^2 + (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} i)(\varrho_n + \sigma_n i) \\ (6)\qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad + (\alpha_{n+1} - \beta_{n+1} i)(\varrho_n - \sigma_n i) \\ &= |b_{n+1}|^2 |B_n|^2 + |B_{n-1}|^2 + 2\alpha_{n+1} \varrho_n - 2\beta_{n+1} \sigma_n \text{[1]}. \end{aligned}$$

2. Ein Kettenbruch von der Form: $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ist bekanntlich stets divergent, wenn alle Teilnenner b_ν mit ungeradem Index gleich Null sind. Denn, aus der Voraussetzung:

$$0 = b_1 = b_3 = \cdots = b_{2n+1}$$

würde mit Hilfe der üblichen Rekursionsformeln folgen:

$$B_{2n+1} = B_{2n-1} = \cdots = B_1 = b_1 = 0,$$

so daß im Falle: $b_{2\nu+1} = 0$ (für jedes $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) alle Näherungsbrüche mit ungeradem Index sinnlos werden, der Kettenbruch also divergiert.

---

[1]) Diese Formel findet sich (mit anderen Bezeichnungen) schon in der Arbeit des Herrn van Vleck: a. a. O. S. 220, Gl. (13).

Ferner ist der fragliche Kettenbruch auch divergent, falls die Reihe $\sum |b_\nu|$ konvergiert. Wenn nämlich der Kettenbruch nicht schon durch das Vorkommen unendlich vieler sinnloser Näherungsbrüche divergent wird, so hat man durchweg: $|B_\nu| > 0$ etwa für $\nu \geqq m$, und daher für $n > m$:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^{n}{}^{\nu} \left(\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right) = \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^{n}{}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{B_\nu B_{\nu-1}}$$

(wegen: $A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu = (-1)^{\nu-1}$). Für die Konvergenz des Kettenbruches, also für die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$ ist daher jedenfalls notwendig, daß:

$$\lim_{n\to\infty} B_n B_{n-1} = \infty. \tag{7}$$

Da aber aus den Ungleichungen:

$$|B_1| = |b_1| < 1 + |b_1|$$
$$|B_2| \leqq 1 + |b_1 b_2| \leqq (1 + |b_1|)(1 + |b_2|)$$

mit Hilfe der Rekursionsformel für die B_ν durch vollständige Induktion sich ergibt, daß allgemein:

$$|B_n| < \prod_{1}^{n}{}^{\nu} (1 + |b_\nu|),$$

so folgt, daß die $|B_n|$ stets unter einer endlichen Schranke bleiben, wenn die Reihe $\sum |b_\nu|$, also auch das unendliche Produkt $\Pi(1 + |b_\nu|)$ konvergiert, somit die für die Konvergenz des Kettenbruches notwendige Bedingung (7) niemals erfüllt sein kann[1]).

3. Die vorausgeschickt formulieren wir jetzt das zu beweisende Konvergenz-Kriterium in folgender Weise:

Sind die für die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo: $b_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i$, notwendigen Bedingungen, nämlich:

---

[1]) Dieses Divergenz-Kriterium rührt, soviel ich weiß, von Stolz her: Vorl. über allg. Arithmetik, Bd. 2 (1886), S. 279.

$|b_{2\nu+1}| > 0$ zum mindesten für einen Wert $\nu = m$,

und: $$\sum_1^\infty{}^\nu |b_\nu| = +\infty$$

erfüllt, so konvergiert der Kettenbruch, wenn die a_ν unter sich, ebenso die mit $(-1)^\nu$ multiplizierten β_ν unter sich, soweit sie von Null verschieden sind, gleiches Vorzeichen haben[1]). Die Konvergenz ist dann und nur dann eine *unbedingte*, wenn die Bedingung $|b_\nu| > 0$ für unendlich viele gerade, wie ungerade ν erfüllt ist.

Beweis. Infolge der vorausgesetzten Divergenz von $\sum |b_\nu|$ muß mindestens eine der beiden Reihen $\sum |a_\nu|$, $\sum |\beta_\nu|$ divergieren. Wir dürfen aber, ohne die Allgemeinheit unseres Ergebnisses zu beschränken, voraussetzen, daß gerade $\sum |a_\nu|$, d. h. die aus den Absolutwerten der reellen Teile der b_ν gebildete Reihe divergiert. Denn wäre etwa nur $\sum |\beta_\nu|$ divergent, so steht es frei, an Stelle des vorgelegten Kettenbruches den mit ihm äquivalenten[2]):

$$-i\left[\frac{1}{(-1)^{\nu-1}\beta_\nu + (-1)^\nu a_\nu i}\right]_1^\infty$$

in Betracht zu ziehen, bei dem ja nunmehr die reellen Teile der Nenner die verlangte Eigenschaft besitzen. Aus analogem Grunde darf man weiter annehmen, daß die nach Voraussetzung gleichbezeichneten a_ν durchweg $\geqq 0$ seien, da man ja andernfalls den vorgelegten Kettenbruch wiederum durch den äquivalenten[3]):

$$-\left[\frac{1}{-a_\nu - \beta_\nu i}\right]_1^\infty$$

---

[1]) Dabei kann immerhin das Vorzeichen von a_ν und $(-1)^\nu\beta_\nu$ verschieden sein.

[2]) Diese Äquivalenz folgt aus der allgemeinen Transformationsformel:

$$\left[\frac{1}{a_\nu + \beta_\nu i}\right]_1^n = \frac{1}{c_0}\left[\frac{c_{\nu-1}\,c_\nu}{c_\nu(a_\nu + \beta_\nu i)}\right]_1^n,$$

wenn gesetzt wird: $c_\nu = (-1)^\nu i$.

[3]) Dies folgt aus der Formel von Fußnote 2) für $c_\nu = -1$.

ersetzen könnte. Beachtet man schließlich noch, daß zwei Kettenbrüche von der Form:

$$\left[\frac{1}{a_\nu + |\beta_\nu| i}\right]_1^\infty \text{ und: } \left[\frac{1}{a_\nu - |\beta_\nu| i}\right]_1^\infty$$

durchweg paarweise konjugierte Näherungsbrüche liefern und somit stets gleichzeitig konvergieren bzw. divergieren, daß es also gegebenenfalls genügt, die Konvergenz des ersteren der beiden zu erweisen, so dürfen wir wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit noch annehmen, daß auch die nach Voraussetzung gleichbezeichneten $(-1)^\nu \cdot \beta_\nu$ durchweg $\geqq 0$ sind (so daß also: $|\beta_\nu| = (-1)^\nu \beta_\nu$). Hiernach ergibt sich aus (4):

$$(8) \quad \begin{cases} \varrho_n = \sum_0^{n-1} {}^\nu\, a_{\nu+1} |B_\nu|^2 \geqq 0 \\ (-1)^n \cdot \sigma_n = \sum_0^{n-1} {}^\nu\, (-1)^{\nu+1} \cdot \beta_{\nu+1} |B_\nu|^2 \geqq 0 \\ \left(\text{also: } |\sigma_n| = \sum_0^{n-1} {}^\nu\, |\beta_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2\right) \end{cases}$$

und sodann aus Gl. (6) (wenn man berücksichtigt, daß: $-\beta_{n+1}\sigma_n = (-1)^{n+1}\beta_{n+1} \cdot (-1)^n \sigma_n \geqq 0$):

$$(9) \quad |B_{n+1}|^2 \begin{cases} \geqq |b_{n+1}|^2 |B_n|^2 \\ \geqq |B_{n-1}|^2. \end{cases}$$

Aus der zweiten dieser Ungleichungen folgt, daß für jedes $\nu \geqq 1$:

$$(10\,\text{a}) \quad |B_{2\nu}| \geqq |B_{2\nu-2}| \geqq \cdots \geqq |B_0| = 1,$$

aus der ersten zunächst für $n = 2m$:

$$|B_{2m+1}| \geqq |b_{2m+1}| \cdot |B_{2m}| \geqq |b_{2m+1}| \quad (\text{also: } > 0),$$

und daher mit nochmaliger Benützung der zweiten, für jedes $\nu \geqq m$:

$$(10\,\text{b}) \quad |B_{2\nu+1}| \geqq |B_{2\nu-1}| \geqq \cdots \geqq |B_{2m+1}| \geqq |b_{2m+1}|.$$

Bedeutet also γ die kleinere der beiden positiven Zahlen 1 und $|b_{2m+1}|$, so findet man:

$$(11) \quad |B_\nu| \geqq \gamma \quad \text{für: } \nu \geqq 2m.$$

Da hiernach die $|B_\nu|$ für $\nu \geqq 2m$ durchweg von Null verschieden sind, so kann man für jedes $n > m$ setzen:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A_{2n}}{B_{2n}} &= \frac{A_{2m}}{B_{2m}} + \sum_{m+1}^{n}{}^{\nu} \left(\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} - \frac{A_{2\nu-2}}{B_{2\nu-2}} \right) \\ \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} &= \frac{A_{2m+1}}{B_{2m+1}} + \sum_{m+1}^{n} \left(\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} - \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}} \right) \end{aligned} \right.$$

und daraus folgt, daß die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ als endliche Zahlen existieren, wenn die beiden Reihen:

$$\sum_{m+1}^{\infty} \left(\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} - \frac{A_{2\nu-2}}{B_{2\nu-2}} \right) \quad \text{und:} \quad \sum_{m+1}^{\infty} \left(\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} - \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}} \right)$$

konvergieren. Diese Konvergenz ist aber offenbar (und zwar als eine absolute) gesichert, wenn die Reihe:

$$\sum \left| \frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} \right|$$

und das heißt schließlich, wegen:

$$\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{b_{\nu+1}}{B_{\nu+1} B_{\nu-1}},$$

die folgende:

$$(13) \qquad \sum \left| \frac{b_{\nu+1}}{B_{\nu+1} B_{\nu-1}} \right|$$

konvergent ist.

Nun folgt aus (8) mit Berücksichtigung von (11) für jedes $n > 2m$:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \varrho_n &\geqq \sum_{2m}^{n-1}{}^{\nu} \alpha_{\nu+1} |B_\nu|^2 \geqq \gamma^2 \cdot \sum_{2m}^{n-1}{}^{\nu} \alpha_{\nu+1} \\ |\sigma_n| &\geqq \sum_{2m}^{n-1}{}^{\nu} |\beta_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2 \geqq \gamma^2 \cdot \sum_{2m}^{n-1}{}^{\nu} |\beta_{\nu+1}|. \end{aligned} \right.$$

Da wegen der vorausgesetzten Divergenz der Reihe $\sum \alpha_{\nu+1}$ unendlich viele $\alpha_{\nu+1}$ von Null verschieden sind, so ist von einer gewissen Stelle ab $\varrho_n > 0$ und:

$$(15) \qquad \lim_{n\to\infty} \varrho_n = +\infty.$$

Dagegen könnte sehr wohl $|\sigma_n| = 0$ und sogar $\lim\limits_{n \to \infty} |\sigma_n| = 0$ sein — letzteres nämlich dann, wenn für $\nu \geqq 2m$ durchweg: $\beta_{\nu+1} = 0$, was ja durch die Voraussetzung nicht ausgeschlossen ist. Abgesehen von diesem besonderen Falle ist von einer gewissen Stelle ab $|\sigma_n|$ wesentlich positiv und mit wachsendem n niemals abnehmend, also $\lim\limits_{n \to \infty} |\sigma_n|$ endlich und von Null verschieden oder unendlich. Um die Konvergenz der Reihe (13) festzustellen, hat man:

$$(16) \qquad \left|\frac{b_{\nu+1}}{B_{\nu+1} B_{\nu-1}}\right| \leqq \frac{a_{\nu+1}}{|B_{\nu+1} B_{\nu-1}|} + \frac{|\beta_{\nu+1}|}{|B_{\nu+1} B_{\nu-1}|}$$

und sodann (mit Benützung von (8) und (5)):

$$(17) \quad \frac{a_{\nu+1}}{|B_{\nu+1} B_{\nu-1}|} = \frac{a_{\nu+1} |B_\nu|^2}{|B_{\nu+1} B_\nu| \cdot |B_\nu B_{\nu-1}|} \leqq \frac{\varrho_{\nu+1} - \varrho_\nu}{\varrho_{\nu+1} \varrho_\nu} \quad (\text{wo: } \lim_{\nu \to \infty} \varrho_\nu = +\infty)$$

d. h. der Wert des ersten Gliedes auf der rechten Seite von Ungl. (16) ist höchstens so groß wie derjenige des allgemeinen Gliedes einer konvergenten Reihe.

Sind nun von Null verschiedene $\beta_{\nu+1}$ nur in endlicher Anzahl vorhanden, so übt das zweite Glied der rechten Seite von Ungl. (16) auf die Konvergenz der fraglichen Reihe überhaupt keinen Einfluß aus. Im entgegengesetzten Falle hat man, analog mit (17):

$$(18) \quad \frac{|\beta_{\nu+1}|}{|B_{\nu+1} B_\nu|} = \frac{|\beta_{\nu+1}| \cdot |B_\nu|^2}{|B_{\nu+1} B_\nu| \cdot |B_\nu B_{\nu-1}|} \leqq \frac{|\sigma_{\nu+1}| - |\sigma_\nu|}{|\sigma_{\nu+1}| \cdot |\sigma_\nu|},$$

wo $\lim\limits_{\nu \to \infty} |\sigma_\nu|$ endlich und von Null verschieden oder positiv unendlich, also der Ausdruck rechts wieder das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe vorstellt.

Hiermit ist also die Konvergenz der Reihe (13) und somit die Existenz der beiden Grenzwerte $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ erwiesen. Daß dieselben aber zusammenfallen, ergibt sich sofort mit Hilfe der Beziehung:

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{B_\nu B_{\nu-1}},$$

da ja aus Gl. (15), wegen: $|B_\nu B_{\nu-1}| \geq \varrho_\nu$ (s. (5)), folgt:

$$\lim_{\nu \to \infty} B_\nu B_{\nu-1} = \infty. \tag{19}$$

Somit ist der fragliche Kettenbruch konvergent.

Soll er aber unbedingt konvergiren, so muß für jeden Kettenbruch von der Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{2\lambda+1}^{\infty}$ bei beliebig großem λ immer mindestens ein von Null verschiedenes $b_{2\nu+1}$ und, da für die Ketttenbrüche von der Form: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{2\lambda}^{\infty}$ die Teilnenner mit geradem Index die analoge Rolle spielen, auch ein von Null verschiedenes $b_{2\nu}$ vorhanden sein, d. h. es müssen von Null verschiedene b_ν sowohl mit geradem, als mit ungeradem Index in unbegrenzter Menge existieren. Diese Bedingung zusammen mit den übrigen Voraussetzungen ist dann aber auch hinreichend für die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches, da ja jeder durch Weglassung von Anfangsgliedern entstehende Kettenbruch nunmehr genau denselben Charakter besitzt wie der ursprüngliche.

Deutung und Konvergenzbeweis für die Methoden zur Lösung der 1. Randwertaufgabe von H. A. Schwarz und von H. Poincaré im linearen Gebiet.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 9. Juni 1917.

Die beiden Wege, welche H. A. Schwarz und H. Poincaré zur Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie eingeschlagen haben, benützen den Umstand, daß man die Aufgabe für bestimmte *Grundgebiete*, z. B. das Kreisinnere, lösen kann und gehen von hier aus zu Gebieten über, die sich durch übereinander greifende Grundgebiete ausfüllen lassen.

Soll z. B. für das in Fig. 1 angegebene Gebiet

$$G = K_1' + K_{12} + K_2',$$

das durch Übereinandergreifen der beiden Kreisgebiete

$$K_1 = K_1' + K_{12}, \;\; K_2 = K_2' + K_{12}$$

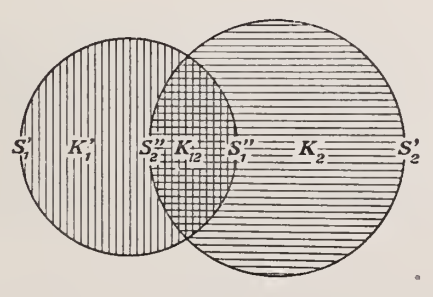


Fig. 1

entsteht, die erste Randwertaufgabe gelöst werden, d. h. soll für das Innere dieses Gebietes diejenige Funktion bestimmt werden, die die Gleichung

$$(1) \qquad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

erfüllt, und längs der freien Randteile

S_1' des Gesamtrandes $S_1 = S_1' + S_1''$ von K_1
S_2' „ „ $S_2 = S_2' + S_2''$ „ K_2

einen vorgeschriebenen Wertverlauf $f_1(s_1')$ bzw. $f_2(s_2')$ hat, so wird man K_1 und K_2 selber als Grundgebiete wählen.

H. A. Schwarz gibt dann das folgende Verfahren an:

Man schreibt willkürlich noch für S_1'' einen Wertverlauf $g_1(s_1'')$ vor und löst dann die Randwertaufgabe für K_1 mit dem Randwertverlauf $f_1(s_1')$, $g_1(s_1'')$. Die so berechnete Funktion V_1 hat auf S_2'' einen bestimmten Wertverlauf $g_2(s_2'')$. Dann löst man die Randwertaufgabe für K_2 mit dem Randwertverlauf $f_2(s_2')$, $g_2(s_2'')$. Die so gefundene Funktion V_2 hat wieder auf dem in ihrem Innern gelegenen Stück S_1'' einen bestimmten Wertverlauf $g_3(s_1'')$. Man bestimmt dann V_3 so, daß diese Funktion im Innern von K_1 die Gleichung (1) erfüllt und die Randwerte $f_1(s_1')$, $g_3(s_1'')$ hat usw. In der unbegrenzten Folge dieses *alternierenden* Verfahrens verschmelzen die Funktionen V_n schließlich, d. h. sie nähern sich asymptotisch der gesuchten Funktion V. —

Um sodann die Poincarésche Methode zu erläutern, betrachten wir zunächst das Verfahren, wie es sich gestaltet, wenn die Randwertaufgabe für einen Kreis, dessen Inneres mit K_1, dessen Rand mit S_1 bezeichnet werden möge, gelöst werden soll. Es wird dabei angenommen, *daß man eine Funktion $V_0(x, y)$ kennt, die den vorgeschriebenen Randwertverlauf besitzt*, im Innern aber noch nicht der Gleichung (1) genügt. Aus diesem V_0 wird eine „Füllung" des Kreisinnern konstruiert, d. h. es wird die Flächenbelegung mit der Dichtigkeit

$$\mu(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \Delta V_0 \tag{2}$$

gebildet und diese Füllung aus K_1 „ausgekehrt". Das heißt, es wird eine Randbelegung längs S_1 gebildet, deren logarithmisches Potential für alle außerhalb von K_1 gelegenen Punkte gleich dem der gesamten Füllung von K_1 ist. Daraus folgt, nebenbei bemerkt, ganz von selbst, daß die Gesamtmasse dieser Belegung gleich der der Füllung ist.

Die Lösung der Randwertaufgabe ist dann

$$V_0(x, y) - W_0(x, y) + W_1(x, y),$$

wobei unter W_0 das Potential der Füllung, unter W_1 das Potential der ausgekehrten Massen zu verstehen ist. Dies wäre die *Auskehrung eines Kreises mit einem einzigen Schritt.*

Betrachtet man dagegen zwei übereinander greifende Kreise, so ist abwechselnd auszukehren. Man beginnt wie oben mit K_1, dann wird in derselben Weise K_2 ausgekehrt; d. h. es wird die nach dem ersten Schritte noch verbliebene Füllung des Teiles K_2' und die durch die erste Auskehrung von K_1 entstandene Belegung von S_1'' in derselben Weise an den Rand S_2 verlegt, wodurch S_2' und S_2'' Belegungen erhalten. Dann wird K_1 von neuem ausgekehrt usw.

Auf diese Art werden allmählich alle Massen an den Rand $S_1' + S_2'$ verlegt.

Die gesuchte Funktion ist dann

$$V_0(x, y) - W_0(x, y) + W_\infty(x, y).$$

Dabei ist $W_0(x, y)$ das Potential der Füllung (2) des ganzen Gebietes und W_∞ das Potential der ausgekehrten, durch das beschriebene alternierende Verfahren an den Rand $S_1' + S_2'$ verlegten Massen.

So viel sei zur notwendigen Übersicht gesagt. —

Im *linearen* Gebiet, also etwa für die Strecke

$$0 \leq x \leq l$$

ist die entsprechende Randwertaufgabe durchaus trivial, handelt es sich doch einfach darum, diejenige Lösung von

$$(1') \qquad \frac{d^2 V}{d x^2} = 0$$

zu finden, die in den Randpunkten $x = 0$ und $x = l$ vorgeschriebene Werte

$$V(0) = a, \; V(l) = b$$

annimmt; also die lineare Funktion

$$(3) \qquad V(x) = a + \frac{x}{l}(b - a),$$

und um dieser Lösung willen wird niemand der Aufgabe Beachtung schenken!

Wohl aber ist ein anderer Umstand immerhin bemerkenswert und darf dargelegt werden. Auch die oben mit Stillschweigen übergangene *Konvergenz* beider Methoden wird im *linearen* Gebiet durchaus selbstverständlich erscheinen. Sie hängt bei der auf diesen Fall übertragenen Schwarzschen Methode mit einer dem praktischen Geometer längst bekannten *Vorschrift für das Einweisen von Punkten auf einer Geraden* zusammen, und bei der auf das lineare Gebiet übertragenen Poincaréschen Methode mit der schrittweise ausgeführten *Bestimmung der Auflagereaktionen eines belasteten Balkens.* Dies wird im folgenden genau entwickelt.

Die Schwarzsche Methode im linearen Gebiet.

Die lineare Funktion $V(x)$ zu bestimmen, die für $x = 0$ den Wert a, für $x = l$ den Wert b annimmt, das ist so viel wie die Aufgabe, die Punkte P_1 (mit den rechtwinkligen Koordinaten $x = 0$, $y = a$) und P_2 (mit den rechtwinkligen Koordinaten $x = l$, $y = b$) verbinden. Nimmt man die Strecke $0 \leq x \leq l$ als Grundgebiet, so hat man die Punkte direkt durch das angelegte Lineal zu verbinden. Wie aber, wenn das Lineal zu kurz ist, wenn seine Länge zwischen $l:2$ und l liegt?

Dann kann man *das alternierende Verfahren* anwenden. Man schaltet zwischen Anfangs- und Endpunkt des Grundgebietes noch zwei Punkte x_1 und x_2 ($> x_1$) ein und nimmt

dann die übereinander greifenden Strecken von 0 bis x_2 und von x_1 bis l als neue Grundgebiete. Im Punkt x_2 nimmt man eine Ordinate c an (deren Endpunkt C schon möglichst auf der geschätzten Verbindungsstrecke $P_1 P_2$ liegt). Dann bringt man $P_1 C$ mit der Geraden g_1 ($x = x_1$) zum Schnitt (Y_1). Y_1 wird dann mit P_2 verbunden und $Y_1 P_2$ mit der Geraden g_2 ($x = x_2$) zum Schnitt gebracht (Z_1). Dann wiederholt man das Verfahren über der ersten Grundstrecke usw. Die Punktfolge $C Z_1 Z_2 \ldots$ nähert sich dann unbegrenzt dem Schnittpunkt Z von $P_1 P_2$ mit g_2, ebenso die Punktfolge $Y_1, Y_2 \ldots$ dem Schnittpunkt Y von $P_1 P_2$ mit g_1 (vgl. Fig. 2).

Praktisch wird dieses Verfahren weniger auf dem Reißbrett ausgeübt, als beim Einweisen von Punkten: Sind P_1 und P_2 zwei unzugängliche Punkte, etwa Hausecken und g_1 und g_2 etwa die Ränder der Bürgersteige, so weist ein Beobachter, der seinen Visierstab in Vertikalstellung längs g_2 bewegt, den andern, der seinen Visierstab längs g_1 bewegt, vom Standort C aus so ein, daß dessen Stab P_1 verdeckt; dann dieser den andern so, daß dessen Stab P_2 verdeckt usw.

Der rechnerische Beweis für die Konvergenz ist sehr einfach, soll aber als Ergänzung doch nicht unterdrückt werden.

Bezeichnen wir die Strecke $C Z_1$ mit u, führen wir ferner die Bezeichnungen

$$\frac{x_1}{x_2} = \varepsilon \,(< 1)$$

$$\frac{l - x_2}{l - x_1} = \eta \,(< 1)$$

ein, so wird

$$Y_1 Y_2 = u \cdot \varepsilon, \quad Z_1 Z_2 = u \varepsilon \eta, \quad Z_2 Z_3 = u \varepsilon^2 \eta^2 \text{ usw.},$$

also

$$C Z_1 + Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + \cdots = u(1 + \varepsilon \eta + \varepsilon^2 \eta^2 + \cdots$$

und bei unbegrenzter Fortsetzung ergibt sich als Summe

$$C Z_\infty = \frac{u}{1 - \varepsilon \eta} = \frac{u \cdot x_2 \cdot (l - x_1)}{l(x_2 - x_1)}.$$

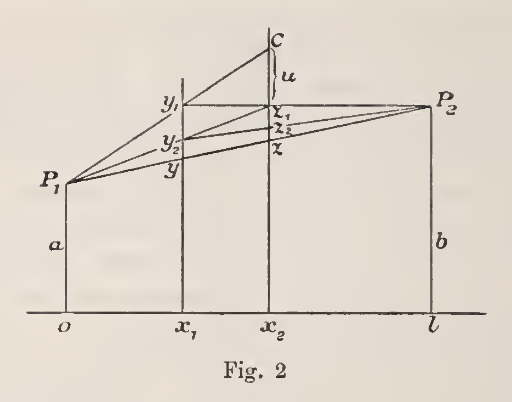


Fig. 2

Außerdem ist

$$u = \frac{x_2 - x_1}{l - x_1} \cdot \frac{(l c - b x_2 - a(l - x_2))}{x_2},$$

also

$$C Z_\infty = c - a - \frac{x_2}{l}(b - a),$$

und die Ordinate von Z_∞ wird

$$a + \frac{x_2}{l}(b - a)$$

genau wie die Gleichung (3) für die Ordinate des Schnittpunktes Z der Verbindungsstrecke $P_1 P_2$ mit der Geraden $x = x_2$ vorschreibt. Die Punkte Z_n nähern sich also asymptotisch dem Punkte Z, und zwar um so rascher, je weniger x_1 von Null und x_2 von l abweicht.

Die Poincarésche Methode im linearen Gebiet.

Wir wählen zunächst einmal die ganze Strecke als Grundgebiet, um die Methode in diesem einfachen Fall darzulegen, wo eine einzige Auskehrung zum Ziel führt. Dabei sind einige Rechnungen durchzuführen, deren Ergebnisse auch durchwegs in der bekannten — von uns heranzuziehenden — Lehre vom belasteten Balken zum Ausdruck kommen. Wir können sie aber füglich nicht entbehren, damit der Anschluß an die Ent-

wickelungen von Poincaré völlig gewahrt bleibt. Wir beginnen also mit Überlegungen der graphischen Statik und deuten diese sodann potentialtheoretisch.

Das *Biegungsmoment* eines belasteten Balkens mit den Unterstützungspunkten $x = 0$ und $x = l$ ist gegeben durch

$$M(x) = Ax - \int_0^x q\,(x-\xi)\,d\xi.$$

Diese Formel gibt das Moment aller Kräfte links vom Querschnitt (an der Stelle x) an, q ist die Belastungsfunktion, und es sind die Auflagerreaktionen:

$$A = \frac{1}{l}\int_0^l q\,(l-\xi)\,d\xi \quad \ldots \text{ im Stützpunkt } x = 0,$$

$$B = \frac{1}{l}\int_0^l q\,\xi\,d\xi \quad \ldots \text{ im Stützpunkt } x = l.$$

Der Drehungssinn ist dabei nach dem Brauche der graphischen Statik positiv gerechnet im Sinne des Uhrzeigers.

Dasselbe Moment ist aber auch gleich dem Moment der auf der rechten Seite wirkenden Kräfte (Auflagerdruck B und Belastung von der Stelle x bis zum Endpunkt), aber mit negativem Vorzeichen versehen; also weiter

$$(4) \quad M(x) = \tfrac{1}{2}\left(Ax + B(l-x) - \int_0^x q\,(x-\xi)\,d\xi - \int_x^l q\,(\xi - x)\,d\xi\right).$$

Endlich ist noch zu bemerken, daß die Beziehung gilt:

$$\int_0^x q\,(x-\xi)\,d\xi = \int_0^x \left(\int_0^\xi q\,d\eta\right) d\xi;$$

die beiden Ausdrücke haben gleichen Wert, weil beide für $x = 0$ zu Null werden und beide denselben ersten Differentialquotienten besitzen

$$\int_0^x q\,d\xi.$$

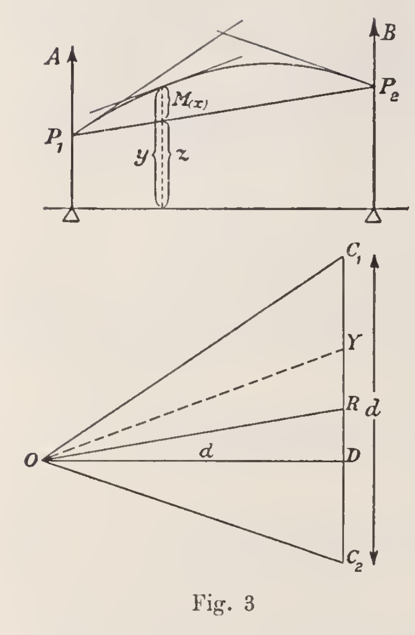


Fig. 3

Sodann erinnern wir uns an den Zusammenhang zwischen *Seilkurve* und *Kräfteplan* (vgl. Fig. 3). Ist im Kräfteplan, in dem die Kräfte $q\,d\xi$ von oben nach unten abgetragen werden

$$YC_1 = \int_0^x q\,d\xi,$$

ferner die Poldistanz $OD = 1$ und die Strecke $DC_1 = c$, so ist die *Seilkurve*, deren erste Ordinate a beliebig gewählt werden kann

$$y = a + \int_0^x u\,dx,$$

wobei

$$u(x) = c - \int_0^x q\,d\xi$$

ist. Es wird also

$$y = a + cx - \int_0^x q(x-\xi)\,d\xi$$

die Gleichung der Seilkurve. Die Endordinate ist dann gegeben durch

$$b = a + cl - \int_0^l q(l-\xi)\,d\xi = a + cl - Al$$

und die Gleichung der durch Anfangs- und Endpunkt der Seilkurve gehenden *Schlußlinie* ist

$$z = a + (b-a)\frac{x}{l} = y - cx + \int_0^x q(x-\xi)\,d\xi + (c-A)x$$

oder

$$z = y - M(x). \tag{5}$$

Man erhält also die Schlußlinie, wenn man von der Ordinate der Seilkurve das Biegungsmoment abzieht.

Um diese Betrachtungen als „Auskehrverfahren" im Sinne von Poincaré zu deuten, schreiben wir zunächst unsere Gleichung in der Form

$$z = y - \frac{1}{2}\left(Ax + B(l-x) - \int_0^x q(x-\xi)\,d\xi - \int_x^l q(\xi - x)\,d\xi\right) \tag{6}$$

und definieren als *Potential im linearen Gebiet* das Produkt aus Masse und negativem Halbabstand. Dann ist das Potential der mit Masse von der Dichtigkeit q belegten Strecke für einen inneren Punkt

$$W(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x q(x-\xi)\,d\xi - \frac{1}{2}\int_x^l q(\xi - x)\,dx.$$

$W(x)$ erfüllt die Gleichung $\frac{d^2 W}{dx^2} = -q.$

Kehren wir jetzt die Massen aus, d. h. bestimmen wir Massen A und B in $x = 0$ und $x = l$, die für außerhalb der Strecke gelegene Punkte dasselbe Potential besitzen, wie die belegte Strecke, so folgt (wir lassen den Faktor $\frac{1}{2}$ fort)

$$\bar{A}x + B(l-x) = \int_0^l q(x-\xi)\,d\xi \qquad (x \leqq 0)$$

$$-\bar{A}x - B(l-x) = \int_0^l q(\xi - x)\,d\xi \qquad (x \geqq l),$$

also

$$\bar{A} = \frac{1}{l}\int_0^l q(l-\xi)\,d\xi = A, \quad \bar{B} = \frac{1}{l}\int_0^l q\xi\,d\xi = B.$$

Die ausgekehrten Massen sind also mit den Auflagerdrucken identisch.

Damit sind wir genau bei dem Poincaréschen Verfahren angelangt, dessen Gedankengänge wir hier für das lineare Gebiet der Deutlichkeit halber noch besonders entwickeln wollen.

Dies Verfahren geht aus von einer im übrigen beliebigen Kurve, die durch den vorgeschriebenen Anfangspunkt

$$(P_1) \qquad x = 0, \quad y = a$$

und den vorgeschriebenen Endpunkt

$$(P_2) \qquad x = l, \quad y = b$$

hindurchgeht. Die Gleichung dieser Kurve sei

$$y = V_0(x),$$

dann bildet man die Streckenbelegung

$$q = -\frac{d^2 V_0}{dx^2}.$$

Man berechnet sodann ihr Potential

$$W_0(x) = -\tfrac{1}{2}\int_0^x q(x-\xi) - \tfrac{1}{2}\int_x^l q(\xi - x)\, d\xi,$$

kehrt die Massen aus, wobei die Ersatzmassen A und B am Rand, d. h. jetzt in den Endpunkten entstehen, und bildet deren Potential

$$W_1(x) = -\frac{Ax + B(l-x)}{2}.$$

Die gesuchte lineare Funktion, d. h. die Gerade, welche P_1 und P_2 verbindet, ist dann gegeben durch den (mit (6) identischen) Ausdruck:

$$z = V_0(x) - W_0(x) + W_1(x).$$

Der Unterschied besteht lediglich in der *Deutung* (einerseits *Moment*, anderseits *Potential*) und im *Ausgangspunkt*, der bei der Bestimmung des Biegungsmomentes natürlich die *Belastung*, bei der Poincaréschen Methode aber die *Seilkurve* ist. Damit ist also die „Auskehrung durch einen Schritt" geleistet.

Wie steht es jetzt, wenn man nicht die *ganze* Strecke $0 \leq x \leq l$ als Grundstrecke nimmt, vielmehr *die beiden übereinander greifenden Strecken*

$$0 \leq x \leq x_2, \quad x_1 \leq x \leq l \quad (0 < x_1 < x_2 < l)$$

zu Grundstrecken genommen werden? Man hat dann nur die beiden Grundstrecken *abwechselnd* auszukehren, das heißt, man

hat zuerst die Belastung der ersten Strecke zu ersetzen durch zwei Vertikalkomponenten A_1 und D_1 in den Punkten 0 und x_2, sodann die zweite Grundstrecke, die mit der vertikal nach unten wirkenden Kraft D_1 in x_2 belastet ist und mit Masse von der Dichtigkeit q und zwar nur noch von $x = x_2$ bis $x = l$ „auszukehren“, wobei Vertikalkräfte C_2 und B_2 im Anfangs- und Endpunkt entstehen usw.

Dabei werden schließlich die Vertikalkräfte völlig in die beiden Unterstützungspunkte verlegt — es unterliegt keinem Zweifel, daß diese alternierende Konstruktion schließlich die Strecke zwischen den Stützpunkten von Kräften befreit und für die Stützpunkte die Auflagerdrucke ergibt.

Indessen wollen wir auch hier nicht versäumen, dem Anspruch auf einen rechnerischen Nachweis der Konvergenz entgegen zu kommen.

Man erhält der Reihe nach

$$A_1 = \frac{1}{x_2}\int_0^{x_2} q\cdot(x_2-\xi)\,d\xi, \quad D_1 = \frac{1}{x_2}\int_0^{x_2} q\xi\,d\xi,$$

$$C_2 = \frac{l-x_2}{l-x_1}D_1 + \frac{1}{l-x_1}\int_{x_2}^{l} q(l-\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{l-x_1}\left(\int_0^{x_2} q\xi\left(\frac{l}{x_2}-1\right)d\xi + \int_{x_2}^{l} q(l-\xi)\,d\xi\right),$$

$$B_2 = \frac{x_2-x_1}{l-x_1}D_1 + \frac{1}{l-x_1}\int_{x_2}^{l} q(\xi-x_1)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{l-x_1}\left(\int_0^{x_2} q\xi\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)d\xi + \int_{x_2}^{l} q(\xi-x_1)\,d\xi\right),$$

$$A_3 = C_2\frac{x_2-x_1}{x_2} = C_2(1-\varepsilon), \quad D_3 = C_2\frac{x_1}{x_2} = C_2\varepsilon,$$

$$C_4 = D_3\frac{l-x_2}{l-x_1} = C_2\varepsilon\eta, \quad B_4 = D_3\frac{(x_2-x_1)}{l-x_1} = C_2\varepsilon(1-\eta),$$

und allgemein

$$C_{2n+2} = C_2 \varepsilon^n \eta^n, \quad B_{2n+2} = C_2 \varepsilon^n \eta^{n-1}(1-\eta),$$
$$A_{2n+3} = C_2 \varepsilon^n \eta^n (1-\varepsilon), \quad D_{2n+3} = C_2 \varepsilon^{n+1} \eta^n.$$

Demnach konvergieren die C und D gegen Null, und die Summen

$$A_3 + A_5 + \cdots = C_2 (1-\varepsilon)(1 + \varepsilon\eta + \varepsilon^2\eta^2 + \cdots)$$
$$B_4 + B_6 + \cdots = C_2 \varepsilon (1-\eta)(1 + \varepsilon\eta + \varepsilon^2\eta^2 + \cdots)$$

gegen

$$C_2 \frac{(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon\eta} = C_2 \frac{(x_2-x_1)(l-x_1)}{x_2 l (x_2-x_1)} = C_2 \frac{(l-x_1)}{l}$$

und

$$C_2 \frac{\varepsilon(1-\eta)}{1-\varepsilon\eta} = C_2 \frac{x_1(x_2-x_1)}{l(x_2-x_1)} = C_2 \frac{x_1}{l}.$$

Man erhält also die Summen

$$\sum_0^\infty A_{2\nu+1} = \int_0^{x_2} q\left(1 - \frac{\xi}{x_2} + \frac{\xi}{x_2} - \frac{\xi}{l}\right) d\xi + \frac{1}{l}\int_{x_2}^{l} q(l-\xi)\, d\xi$$
$$= \frac{1}{l}\int_0^l q(l-\xi)\, d\xi = A$$

und

$$\sum_0^\infty B_{2\nu+2} = \int_0^{x_2} q\xi \cdot \frac{x_2 - x_1 + x_1 - \frac{x_2 x_1}{l}}{x_2(l-x_1)}\, d\xi$$
$$+ \frac{1}{l-x_1}\int_{x_2}^{l} q\left(\xi - x_1 + x_1 - \frac{\xi x_1}{l}\right) d\xi = \frac{1}{l}\int_0^l q\xi\, d\xi = B.$$

Damit ist der Beweis geführt, daß auch die Auskehrmethode durch ein *konvergentes Verfahren* zum Ziel gelangt, und es ist diese für die graphische Statik selbstverständliche Wahrheit bestätigt.

Über das Verhalten analytischer Funktionen an Verzweigungsstellen[1]).

Von **Georg Faber.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 13. Oktober 1917.

Das Verhalten analytischer Funktionen an Polen und wesentlich singulären Stellen ist durch unzählige Arbeiten bis in alle Einzelnheiten aufgeklärt; dagegen fehlen allgemeine Untersuchungen über das Verhalten an Verzweigungsstellen fast völlig. In einer früheren Abhandlung (Math. Ann., Bd. 60 (1905), S. 379) habe ich das Mittag-Lefflersche Theorem auf mehrdeutige Funktionen ausgedehnt; dadurch ist die Untersuchung beliebig verwickelter mehrdeutiger Funktionen auf die einfacherer zurückgeführt, welche die Mindestzahl, nämlich zwei Verzweigungsstellen besitzen. Von diesen Funktionen ist wieder $\varphi(x) = \int_a^b \frac{s(z)}{z - x}\, dz$ der einfachste Typus; a, b sind die beiden Verzweigungsstellen, das Integral ist über einen vorgeschriebenen Weg C zu erstrecken, $s(z)$ ist eine gegebene analytische Funktion von $z = \xi + i\eta$ oder auch nur eine

[1]) Dieser Aufsatz bildet einen stark gekürzten Auszug aus einer umfangreichen Abhandlung, die vor zwei Jahren von der Redaktion der acta mathematica angenommen worden war, von mir aber, da die Drucklegung sich ins Unabsehbare verzögerte, wieder zurück erbeten wurde. Die vorliegende Fassung, in welcher ich von längeren Überlegungen nur den Gedankengang mitteile und die nicht schwierige, aber stellenweise weitläufige Einzelnausführung dem Leser überlasse, gewinnt dadurch vor der ursprünglichen Abhandlung den Vorzug größerer Übersichtlichkeit.

Funktion von ξ, η. In diesem Falle kann C eine natürliche Grenze der Funktion $\varphi(x)$ sein, und a, b sind dann nicht eigentliche Verzweigungspunkte, insofern es unmöglich ist, durch einen Umlauf um sie in ein anderes Blatt der Funktion zu gelangen; trotzdem will ich auch in diesem Falle von einem „unausgebildeten" Verzweigungspunkt sprechen. Ist $s(z)$ für alle inneren Punkte von C regulär analytisch, so darf man bekanntlich C noch in gewissen Grenzen abändern, auch ist dann (wie übrigens auch unter viel allgemeineren Voraussetzungen über $s(z)$) die Differenz der Funktionswerte $\varphi(x)$ an beiden Ufern des Schnitts C gleich $2\pi i s(x)$; $s(z)$ möge daher die „Sprungfunktion" heißen.

Die Funktionen $\varphi(x) = \int\limits_a^b \frac{s(z)}{z-x} dz$ haben für die allgemeine Theorie der mehrdeutigen Funktionen nicht nur als einfachstes Beispiel, sondern auch deshalb besondere Bedeutung, weil jede Funktion, welche die zwei Verzweigungsstellen a, b, jedoch sonst in der längs C aufgeschnittenen Ebene keine Singularität besitzt, sich in der Form

$$g(x)\int\limits_a^b \frac{s(z)}{z-x} dz + g_1(x) \tag{1}$$

darstellen läßt, wo $g(x)$, $g_1(x)$ eindeutige und in der ganzen Ebene außer in a und b reguläre Funktionen bedeuten.

Es ist keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, wenn ich im folgenden $a = 1$, b reell > 1, $\leq \infty$ annehme und den Schnitt C von 1 bis b geradlinig führe. Ich untersuche diese Funktionen $\varphi(x)$ sowie gewisse allgemeinere $\varphi_a(x)$, die in der Form (1) enthalten sind, in der Umgebung der Stelle $x = 1$ und behandle insbesondere folgende beide Aufgaben in den beiden ersten Abschnitten der Arbeit:

1. Von welcher Größenordnung sind die Koeffizienten a_ν, a_ν^a der Potenzreihen $\varphi(x) = \sum\limits_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$,

$\varphi_a(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu^a x^\nu$; die gleiche Aufgabe für die Reihen nach Potenzen von $x - x_1$ ist dadurch von selbst mitgelöst, immer falls x_0 reell < 1 ist, für komplexe x_0 jedenfalls dann, wenn die Reihe auf ihrem Konvergenzkreis nur die eine singuläre Stelle $x = 1$ hat, und wenn es erlaubt ist, in deren Nähe den Schnitt C so abzuändern, daß er in die Verlängerung des Radius $x_0 1$ fällt.

2. Untersuche ich Größenordnung und Wertevorrat der Funktionen $\varphi(x)$, $\varphi_a(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = 1$, insbesondere auf den Kreisen $|x - 1| =$ konst.

Ein dritter Abschnitt bringt Ergänzungen, Beispiele, Anwendungen.

Es ist zweckmäßig, neben $s(\xi)$ $(\infty > \xi > 1)$ noch zwei andere Funktionen $v(\tau)$ $(0 < \tau < 1)$ und $t(w)$ $(1 < w < \infty)$ zu betrachten, deren Beziehungen zu $s(\xi)$ und untereinander durch folgende Gleichungen ausgedrückt werden:

$$
\begin{aligned}
\xi s(\xi) &= \tau^{-1} s(\tau^{-1}) = \frac{w}{w-1} s\left(\frac{w}{w-1}\right) \\
&= v\left(\frac{1}{\xi}\right) = v(\tau) = v\left(1 - \frac{1}{w}\right) \\
&= t\left(\frac{\xi}{\xi - 1}\right) = t\left(\frac{1}{1-\tau}\right) = t(w).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Außerdem benutze ich folgende Bezeichnungen: ε, ε', ε'' sind stets Funktionen (nicht jedesmal die gleichen), die der Null zustreben, wenn ihre Veränderliche positiv unendlich wird; es ist also z. B. $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon(\nu) = 0$, $\lim\limits_{\xi=1+0} \varepsilon'\left(\frac{1}{\xi - 1}\right) = 0$ usw.; für $\varepsilon(\nu)$ schreibe ich kürzer ε_ν. In ähnlichem Sinne schreibe ich, $\varepsilon_{\nu\beta}$, wenn $\lim\limits_{\beta=\infty}\left(\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, \varepsilon_{\nu\beta}\right) = 0$.

Unter dem Logarithmus einer reellen nicht negativen oder einer komplexen Zahl x verstehe ich stets den Hauptwert $\lg x$, dessen Imaginärteil zwischen $-\pi i$ und $+\pi i$ liegt; wenn x veränderlich ist und reelle negative Werte annimmt, wird jedesmal durch die Forderung der Stetigkeit bestimmt, ob der

Imaginärteil $+\pi i$ oder $-\pi i$ sein soll. Potenzen a^k seien stets durch $e^{k \lg a}$ definiert; $\lg_2 x$ ist soviel wie $\lg(\lg x)$, $\lg_m x = \lg(\lg_{m-1} x)$ $(m = 3, 4, \ldots)$, $\lg_1 x = \lg x$, $L_m x = x \lg x \lg_2 x \ldots \lg_m x$.

I. Abschnitt.

Abschätzung der Taylor-Koeffizienten.

Die Koeffizienten a_ν der Potenzreihe

$$(3)\quad \varphi(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = \int_1^\infty \frac{s(\xi)\,d\xi}{\xi - x} = \int_0^1 \frac{v(\tau)\,d\tau}{1 - \tau x} = \int_1^\infty \frac{t(w)\,dw}{w(w - x(w-1))}$$

haben die Form[1])

$$(4)\quad a_\nu = \int_1^\infty \frac{s(\xi)}{\xi^{\nu+1}}\,d\xi = \int_0^1 v(\tau)\,\tau^\nu\,d\tau = \int_1^\infty \frac{t(w)\,(1 - w^{-1})^\nu}{w^2}\,dw,$$

und es handelt sich darum, diese Integrale (4) abzuschätzen; dies soll zunächst unter der Voraussetzung geschehen, daß $s(\xi)$ reell und

$$(5)\quad s(\xi) \geqq 0 \text{ ist.}$$

Doch soll selbstverständlich nicht $\int_1^\xi s(\xi)\,d\xi = 0$ sein für alle ξ in einer gewissen rechtsseitigen Umgebung der Stelle $\xi = 1$.

Bei der hier wie auch im nächsten Abschnitt erstrebten Genauigkeit kommt es auf die Funktionswerte $s(\xi)$ für $\xi > \xi'$, wo ξ' irgend eine feste Zahl > 1 ist, überhaupt nicht an; es darf daher immer, wenn es vorteilhaft erscheint,

$$(6)\quad s(\xi) = 0 \text{ für } \xi > \xi'$$

vorausgesetzt werden. Dadurch wird von $\varphi(x)$ nur eine im Kreise $|x| = \xi'$ reguläre Funktion abgezogen.

---

[1]) Solche Reihen $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ sind zuerst von Herrn Hadamard (Journ. de math. (4), Bd. 8 (1892), S. 158) und seitdem vielfach untersucht worden (vgl. z. B. Pringsheim, Münch. Ber. 1912, S. 58, woselbst weitere Literaturangaben). Meine obigen Ausführungen haben mit diesen Untersuchungen nur den Ausgangspunkt gemein.

Aus (5) folgen sofort zwei Sätze, deren sehr einfache Beweise ich unterdrücke:

I. Es ist

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 1. \tag{7}$$

II. Wenn $v(\tau)$ und $\bar{v}(\tau)$ 2 Funktionen, für die $\lim\limits_{\tau=1-0} \frac{v(\tau)}{\bar{v}(\tau)} = A$ gilt, und a_ν, $\overline{a_\nu}$ die zugehörigen Koeffizienten sind, so ist

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{\overline{a_\nu}} = A. \tag{8}$$

Die Annahme (5) ist als Ausgangspunkt für die weitere Untersuchung noch zu allgemein; ich mache daher vorläufig außerdem folgende Voraussetzung:

Zu jedem Zahlenpaare $\beta' > 1$, $\varepsilon > 0$ (β' beliebig groß, ε beliebig klein) gibt es eine Zahl $w' > 1$ der Art, daß für alle $w > w'$ und alle β zwischen 1 und β' folgende Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} &(1+\varepsilon)^{-1} t(\beta w) < t(w) < (1+\varepsilon) t(\beta w) \\ &(1+\varepsilon)^{-1} t(\beta^{-1} w) < t(w) < (1+\varepsilon) t(\beta^{-1} w) \end{aligned} \tag{9 a}$$

oder, was dasselbe heißt,

$$\begin{aligned} &(1+\varepsilon)^{-1} v\left(1-\frac{1}{\beta w}\right) < v\left(1-\frac{1}{w}\right) < (1+\varepsilon) v\left(1-\frac{1}{\beta w}\right) \\ &(1+\varepsilon)^{-1} v\left(1-\frac{\beta}{w}\right) < v\left(1-\frac{1}{w}\right) < (1+\varepsilon) v\left(1-\frac{\beta}{w}\right) \end{aligned} \tag{9 b}$$

oder

$$\begin{aligned} &(1+\varepsilon)^{-1} s\left(1+\frac{1}{\beta w-1}\right) < s\left(1+\frac{1}{w-1}\right) < (1+\varepsilon) s\left(1+\frac{1}{\beta w-1}\right) \\ &(1+\varepsilon)^{-1} s\left(1+\frac{1}{\beta^{-1} w-1}\right) < s\left(1+\frac{1}{w-1}\right) < (1+\varepsilon) s\left(1+\frac{1}{\beta^{-1} w-1}\right) \end{aligned} \tag{9 c}$$

Durch diese Bedingungen, die weder Monotonie noch Stetigkeit der Funktionen $t(w)$, $s(\xi)$, $v(\tau)$ verlangen, wird ein großer Kreis der bekannten elementaren mehrdeutigen Funktionen getroffen; genügen zwei Funktionen einzeln diesen Bedingungen (9),

so auch ihr Produkt und Quotient, unter Beachtung von (5) auch ihre Summe.

Beispiele von Funktionen $t(w)$, die der Bedingung (9a) genügen: $t(w) = (\lg w)^k$, wo k jede reelle Zahl sein kann; allgemeiner $(\lg_m w)^k$, ferner $\lg w + \sin \lg w$ usw.

Für alle zugelassenen Funktionen $t(w)$ gilt folgender leicht zu beweisende Satz:

Zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl w' der Art, daß für $w_2 > w_1 > w'$

(10) $t(w_2) w_2^{-\varepsilon} < (1+\varepsilon) t(w_1) w_1^{-\varepsilon}$ und $t(w_2) w_2^{\varepsilon} > (1+\varepsilon)^{-1} t(w_1) w_1^{\varepsilon}$

wird. Und hieraus folgt für jedes $\eta > 0$

$$\lim_{w=\infty} w^{\eta} t(w) = \infty, \quad \lim_{w=\infty} w^{-\eta} t(w) = 0. \tag{11}$$

Nach diesen Vorbereitungen zerlege ich $\int\limits_0^1 v(\tau)\tau^{\nu} dt$ in die 3 Integrale $\int\limits_0^{1-\frac{\beta}{\nu}} + \int\limits_{1-\frac{\beta}{\nu}}^{1-\frac{1}{\beta\nu}} + \int\limits_{1-\frac{1}{\beta\nu}}^{1}$ mit $\beta > 1$, $< \nu$. Auf Grund des Vorausgeschickten erkennt man, daß das erste und dritte dieser Teilintegrale die Form $\varepsilon_{\nu\beta} \frac{t(\nu)}{\nu}$ haben, während das mittlere gleich $\frac{t(\nu)}{\nu}(1 + \varepsilon_{\nu\beta})$ wird; und da a_ν selbst von β nicht abhängt, folgt daraus das erste Hauptergebnis:

$$a_\nu = \frac{t(\nu)}{\nu}(1+\varepsilon_\nu) = \frac{v\left(1-\frac{1}{\nu}\right)}{\nu}(1+\varepsilon_\nu) = \frac{s\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}{\nu}(1+\varepsilon_\nu'). \tag{12}$$

Diese Abschätzung soll nach zwei Richtungen erweitert werden. Die erste Verallgemeinerung wird am besten an einem Beispiel erklärt, an dem zugleich zu ersehen ist, wie sie auch in anderen Fällen angebracht werden kann. Die Funktion $t(w) = \sin(\lg_2 w)$ gehört nicht zu den vermöge (9a) zugelassen; schließt man aber die Werte ν aus, die in den Inter-

vallen $\frac{1}{k}\exp(\exp k\pi) < \nu < k\exp(\exp k\pi)$ liegen ($k = 1, 2, 3\ldots$), so bleibt für die übrigen ν die Abschätzung (12) giltig, für die ausgeschlossenen ν aber gilt $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu a_\nu = 0$; ähnliches gilt für $t(w) = \cos \lg_2 w$, wobei wiederum die Nullstellen der Funktions-Intervalle auszuschließen sind. Da die beidesmal ausgeschlossenen Intervalle jedenfalls für große ν nicht übereinander greifen, gilt für $t(w) = \cos(\lg_2 w) + \sqrt{-1}\sin(\lg_2 w)$ die Gleichung (12) ohne Einschränkung, (ebenso für $t(w) = \cos \lg_m w + i \sin \lg_m w$, $m > 2$).

Die zweite Verallgemeinerung, die auch gleichzeitig mit der soeben besprochenen angebracht werden kann, besteht in der Zulassung von Sprungfunktionen $s_\alpha(\xi) = (\xi - 1)^\alpha s(\xi)$, wo $s(\xi)$ der Bedingung (9b) genügt, während α irgend eiue reelle Zahl sein kann; im Anschluß an die bisherigen Bezeichnungen setze ich $v_\alpha(\tau) = \frac{1}{\tau} s_\alpha\left(\frac{1}{\tau}\right)$, $t_\alpha(w) = v_\alpha\left(1 - \frac{1}{w}\right)$.

Wenn $\alpha > -1$ ist, läßt sich eine Funktion $\varphi_\alpha(x)$ mit der vorgeschriebenen Differenz $2\pi i\, s_\alpha(\xi)$ an beiden Ufern von C am einfachsten wieder durch das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{s_\alpha(\xi)}{\xi - x}\, d\xi$ definieren:

$$(13)\quad \varphi_\alpha(x) = \int\limits_1^\infty \frac{s_\alpha(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = \int\limits_0^1 \frac{v_\alpha(\tau)}{1 - \alpha\tau}\, d\tau = \int\limits_1^\infty \frac{t_\alpha(w)}{w(w - x(w-1))}.$$

$\varphi_0(x)$ ist somit das nämliche wie $\varphi(x)$. Daß das Verhalten von $s_\alpha(\xi)$ bei $\xi = \infty$ die Darstellung (13) nicht hindert, darf ohne weiteres angenommen werden, da wir uns vorbehalten haben, jederzeit die Voraussetzung (6) zu machen. Mit Überlegungen, ganz ähnlich denen, die zu (12) geführt haben, beweist man, daß die Koeffizienten a_ν^α der Potenzreihen

$$(14)\qquad \varphi_\alpha(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu^\alpha x^\nu$$

für die obigen Funktionen $\varphi_\alpha(x)$ ($\alpha > -1$) der Grenzgleichung

$$a_\nu^\alpha = \frac{t(\nu)}{\nu^{1+\alpha}} \Gamma(\alpha + 1)(1 + \varepsilon_\nu) \tag{15}$$

genügen; für $\alpha = 0$ ist (15) mit (12) identisch.

Ist n irgend eine ganze Zahl > 0 und bleibt $\alpha > -1$, so ergibt sich durch den Schluß von n auf $n+1$:

(16) $\varphi_{\alpha+n}(x) = (x-1)^n \varphi_\alpha(x) +$ einem Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Wir hätten mithin, ohne daß dadurch die Abschätzung (15) beeinflußt worden wäre, $\varphi_\alpha(x)$ durch (13) nur für die α, die > -1 und $\leqq 0$ zu definieren brauchen, und für $\alpha + n$ die neue abgeänderte Definition

$$\varphi_{\alpha+n}(x) = (x-1)^n \varphi_\alpha(x) \quad (-1 < \alpha \leqq 0) \tag{17}$$

verwenden können. Wir wollen künftig stets in diesem Sinne das Zeichen $\varphi_\alpha(x)$ verstehen und dürfen jetzt auch für n eine negative ganze Zahl wählen, so daß $\varphi_\alpha(x)$ für jedes reelle α definiert ist.

Durch eine unschwierige Rechnung, die ich hier nicht ausführe, findet man sodann, daß die Koeffizientenabschätzung (15) für alle reellen α giltig bleibt, außer wenn α eine negative ganze Zahl ist. Für diesen Ausnahmefall aber ergibt sich

$$a_\nu^{-n} = (-1)^n \frac{T(\nu)}{\nu^{-n+1}\,\Gamma(n)} (1 + \varepsilon_\nu). \tag{18}$$

Die hier benutzte Funktion $T(w)$ ist durch die Gleichung

$$T(w) = \int_1^w \frac{t(w)\,dw}{w} \tag{19}$$

definiert und hat folgende Eigenschaften, die z. T. beim Beweise von (18), z. T. auch im nächsten Abschnitt zu benutzen sind:

I. $\lim\limits_{w=\infty} \dfrac{T(w)}{t(w)} = \infty$.

II. $T(w)$ genügt ebenso wie $t(w)$ den Ungleichungen (9a).

III. $\int\limits_1^\infty \frac{t w}{w} d w$ und $\sum\limits_0^\infty{}^\nu a_\nu$ konvergieren und divergieren gleichzeitig und sind im Falle der Konvergenz einander gleich.

Für eine spätere Anwendung möge noch erwähnt werden, daß nach dem Cauchyschen Integralsatze

$$a_\nu^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi_\alpha(z)}{z^{\nu+1}} d z \text{ ist,} \tag{20}$$

das Integral erstreckt über einen Kreis $|z| = \xi' > 1$ und eine Schleife, die auf beiden Ufern der reellen Achse und auf einem kleinen Kreis um den Punkt 1 herumführt, und daß hiebei, so lange man sich mit der Genauigkeit der Abschätzungen (15), (18) begnügt, das Integral über den Kreis $|z| = \xi'$ weggelassen werden darf.

Ist $\varkappa$ eine reelle Zahl < 1, so findet man vermöge der Substitution $\xi' = \frac{\xi - \varkappa}{1 - \varkappa}$ für die Koeffizienten $a_\nu^\alpha(\varkappa)$ der Potenzreihe

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu^\alpha(\varkappa)\,(x - \varkappa)^\nu$$

die Abschäzung

$$\begin{gathered} a_\nu^\alpha(\varkappa) = (1 - \varkappa)^{\alpha - \nu} a_\nu^\alpha (1 + \varepsilon_\nu) \\ (-\infty < \alpha < +\infty;\ -\infty < \varkappa < 1). \end{gathered} \tag{21}$$

II. Abschnitt.

Verhalten der Funktionen $\varphi(x)$ und $\varphi_\alpha(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = 1$.

Ich setze

$$x = 1 - \varrho^{-1}\cos\psi + i\varrho^{-1}\sin\psi \quad (-\pi < \psi < \pi,\ \ \varrho > 0), \tag{22}$$

und lasse dann ϱ über alle Grenzen wachsen. Das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{\varrho^{-1}\sin\psi\, s(\xi)}{(\xi - 1 + \varrho^{-1}\cos\psi)^2 + \varrho^{-2}\sin^2\psi} d\xi$ für den Imaginärteil

$J(\varphi(x))$ zerlege ich in $\int\limits_1^{1+\frac{\varrho^{-1}}{\beta}} + \int\limits_{1+\frac{\varrho^{-1}}{\beta}}^{1+\varrho^{-1}\beta} + \int\limits_{1+\varrho^{-1}\beta}^{\infty}$ und finde diese Integrale der Reihe nach gleich $\varepsilon_{\varrho\beta}\psi t(\varrho)$, $(1+\varepsilon_{\varrho\beta})\psi t(\varrho)$, $\varepsilon_{\varrho\beta}\psi t(\varrho)$; daraus folgt

$$J(\varphi(x)) = \psi t(\varrho)\,(1+\varepsilon_\varrho) \tag{23}$$

und zwar ist $\lim\limits_{\varrho=\infty}\varepsilon_\varrho = 0$ gleichmäßig für alle ψ, die der Ungleichung $-\pi < \psi < \pi$ genügen. Für die Endwerte $\psi = \pm\pi$ hat das Integral für $J(\varphi(x))$ keinen Sinn; legt man ihm aber an diesen Stellen die Werte $\pm\pi s\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)$ bei, denen es, falls $s(\xi)$ bei $\xi = 1 + \frac{1}{\varrho}$ stetig ist, ohnehin mit $\lim \psi = \pm\pi$ zustrebt, so gilt die Abschätzung (23) gleichmäßig in dem abgeschlossenen Intervall $-\pi \leq \psi \leq \pi$.

Die nämliche Zerlegung nehme ich mit dem Integrale $\int\limits_1^\infty \frac{(\xi - 1 + \varrho^{-1}\cos\psi)\,s(\xi)}{(\xi - 1 + \varrho^{-1}\cos\psi)^2 + \varrho^{-2}\sin^2\psi}\,d\xi$ für den Realteil $\Re(\varphi(x))$ vor; während hier die beiden ersten Teilintegrale je auf $\varepsilon_{\varrho\beta}T(\varrho)$ führen, wird das dritte gleich $T(\varrho)\,(1+\varepsilon_{\varrho\beta})$ und also

$$\Re(\varphi(x)) = T(\varrho)\,(1+\varepsilon_\varrho) \tag{24}$$

mit $\lim\limits_{\varrho=\infty}\varepsilon_\varrho = 0$ gleichmäßig für alle ψ die der Ungleichung $|\psi| \leq \pi - \varepsilon'$ mit $\varepsilon' > 0$ genügen. Durch eine geeignete Zusatzbedingung für $s(\xi)$ kann man erreichen, daß (24) gleichmäßig für das abgeschlossene Intervall $|\psi| \leq \pi$ gilt; es genügt z. B. als solche, daß $s(\xi)$ differenzierbar ist und daß

$$\overline{\lim_{\xi=1+0}}\,(\xi - 1)\frac{d\lg s(\xi)}{d\xi} \neq \infty \text{ ist;} \tag{25}$$

ihr genügen beispielsweise $s(\xi) = (\lg_m(\xi - 1))$ und alle Produkte solcher Funktionen.

Nach Zusammenfassung des Real- und Imaginärteils hat man also

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\varphi(1-\varrho^{-1}\cos\psi+i\varrho^{-1}\sin\psi)\\ &=T(\varrho)\,(1+\varepsilon_\varrho)+i\psi t(\varrho)\,(1+\varepsilon'_\varrho); \end{aligned}$$

man vergleiche damit das bekannte Verhalten der Funktion $\lg\frac{1}{1-x}$, die als einfachstes Beispiel gelten kann ($t(\varrho)=1$).

Das Verhalten der Funktionen $\varphi_n(x)$ mit ganzzahligem positivem oder negativem n ergibt sich auf Grund der Definition (14) unmittelbar aus (26), wenn man noch $\lim\limits_{w=\infty}\frac{T(w)}{t(w)}=\infty$ beachtet:

$$(27)\qquad \begin{aligned} &\varphi_n(1-\varrho^{-1}\cos\psi+i\varrho^{-1}\sin\psi)\\ &=T(\varrho)\,(\varrho^{-n}\cos n\psi-i\varrho^{-n}\sin n\psi)\,(1+\varepsilon_\varrho) \qquad \text{oder}\\ &\varphi_n(x)=T\left(\frac{1}{1-x}\right)(x-1)^n\,(1+\varepsilon_\varrho). \end{aligned}$$

Bei den Funktionen $\varphi_\alpha(x)$, wo α keine ganze Zahl ist, wird man zunächst α zwischen Null und -1 voraussetzen und sich dann auf Gleichung (17) berufen. Den Realteil und Imaginärteil von $\varphi_\alpha(x)$ ($-1<\alpha<0$) wird man wieder gesondert abschätzen und zu diesem Zwecke die auftretenden Integrale, genau wie vorhin, in drei Teilintegrale zerlegen. Ich übergehe wieder die nicht schwierigen, aber etwas weitläufigen Zwischenrechnungen und schreibe gleich das für alle reellen nicht ganzzahligen α giltige Schlußergebnis nach Zusammenfassung des Real- und Imaginärteils hin:

$$(28)\qquad \varphi_\alpha(x)=\frac{\pi}{\sin(-\alpha\pi)}(1-x)^\alpha\, t\left(\frac{1}{1-x}\right)(1+\varepsilon_\varrho).$$

Für die Gleichmäßigkeit der Beziehung $\lim\limits_{\varrho=\infty}\varepsilon_\varrho=0$ gilt das S. 272 Gesagte.

III. Abschnitt.

Ergänzungen, Beispiele, Anwendungen.

§ 1. **Eine merkwürdige Funktionalgleichung.** $\varphi(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^\nu \int_0^1 v(\tau)\tau^\nu d\tau x^\nu$, $\psi(x) = \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^\nu \int_0^1 u(\tau)\tau^\nu d\tau x^\nu$ seien zwei Funktionen „der φ-Klasse". Dann ist auch $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu$ eine Funktion der φ-Klasse, d. h. $a_\nu b_\nu$ läßt sich in der Form $\int_0^1 W(\tau)\tau^\nu d\tau$ darstellen und zwar ist $W(\tau) = \int_\tau^1 \frac{u(\tau')}{\tau'} v\left(\frac{\tau}{\tau'}\right) d\tau'$. Man beweist dies folgermaßen: δ sei eine Zahl > 0, < 1, dann ist

$$(29)\quad \begin{aligned} \int_0^1 u(\tau)\tau^\nu d\tau &= \lim_{\delta=1} \sum_1^\infty{}^\varkappa u(\delta^\varkappa)\,\delta^{\varkappa(\nu+1)}(1-\delta) \qquad \text{und} \\ \int_0^1 v(\tau)\tau^\nu d\tau &= \lim_{\delta=1} \sum_1^\infty{}^\varkappa v(\delta^\varkappa)\,\delta^{\varkappa(\nu+1)}(1-\delta); \end{aligned}$$

indem man diese Gleichungen miteinander multipliziert und dann die rechte Seite nach Potenzen von $\delta^{\nu+1}$ ordnet, erhält man:

$$(30)\quad \int_0^1 u(\tau)\tau^\nu d\tau \cdot \int_0^1 v(\tau)\tau^\nu d\tau = \lim_{\delta=1} \sum_1^\infty{}^\varkappa \delta^{(\nu+1)\varkappa}\left[u(\delta)v(\delta^{\varkappa-1}) + u(\delta^2)v(\delta^{\varkappa-2}) + \cdots + u(\delta^{\varkappa-1})v(\delta)\right](1-\delta)^2;$$

auf der rechten Seite konvergiert $(1-\delta)\,[u(\delta)v(\delta^{\varkappa-1}) + u(\delta^2)v(\delta^{\varkappa-2}) + \cdots u(\delta^{\varkappa-1})v(\delta)]$ gegen $W(\delta^\varkappa) = \int_{\delta^\varkappa}^1 \frac{u(\tau')}{\tau'} v\left(\frac{\delta^\varkappa}{\tau'}\right) d\tau'$ und, wenn man noch $\delta^\varkappa = \tau$ setzt, die ganze rechte Seite, wie behauptet, gegen $\int_0^1 W(\tau)\tau^\nu d\tau$. Mit $W(\tau)$ ist auch die Sprung-

funktion und mit dieser die analytische Fortsetzung der Funktion $\sum_{0}^{\infty} \nu a_\nu b_\nu x^\nu$ über C hinaus bekannt; sind beide Funktionen $u(\tau)$, $v(\tau)$ auf C regulär analytisch, so auch $W(\tau)$; $W(\tau)$ ist nur dann $\equiv 0$, wenn eine der Funktionen $u(\tau)$, $v(\tau)$ es ist.

§ 2. Produkte von Funktionen $\varphi_\alpha(x)$. Wie soeben sei

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{v(\tau)\,d\tau}{1-\tau x}, \quad \psi(x) = \int_0^1 \frac{u(\tau)\,d\tau}{1-\tau x}, \quad \text{ferner } \chi(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x).$$

Die Funktionen $u(\tau)$, $v(\tau)$ und die aus ihnen hervorgehenden Sprungfunktionen mögen den Bedingungen (9 b), (9 c), wie auch (25) genügen; da jetzt die Verzweigungsstellen $x=\infty$ eine mit $x=1$ gleichberechtigte Rolle spielt, sollen auch die Funktionen $u(1-\tau)$, $v(1-\tau)$ den nämlichen Bedingungen genügen. Die zu $\chi(x)$ längs C gehörige Sprungfunktion $S(\xi)$ ergibt sich ohne weiteres aus den Werten, welche von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ längs C angenommen werden; insbesondere ergibt sich für das Verhalten von $S(\xi)$ in der Nähe von $\xi=1$ folgende Gleichung

$$(31) \qquad \begin{aligned} S(\xi) = \Bigg(&T_1\left(\frac{1}{\xi-1}\right)t_2\left(\frac{1}{\xi-1}\right) \\ &+ T_2\left(\frac{1}{\xi-1}\right)t_1\left(\frac{1}{\xi-1}\right)\Bigg)\left(1+\varepsilon\left(\frac{1}{\xi-1}\right)\right), \end{aligned}$$

wo t_1, t_2, T_1, T_2 die zu $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gehörigen t- und T-Funktionen sind. Daraus folgt, daß $S(\xi)$ der Bedingung (9 b) genügt; da ferner $S(\xi)$ bei $\xi=\infty$ infolge der gemachten Annahmen stärker Null wird als $\frac{1}{\xi^\varkappa}$, falls $\varkappa < 2$, so konvergiert $\int_1^\infty \frac{S(\xi)}{\xi - x}\,d\xi$. Diese Funktion erleidet längs C den nämlichen Sprung wie $\chi(x)$, kann sich also von $\chi(x)$ nur um eine eindeutige, überall außer etwa an den Stellen $x=1$, $x=\infty$ reguläre Funktion $E(x)$ unterscheiden, und man erkennt leicht, daß $E(x)\equiv 0$ sein muß. Es ist also (wenigstens unter den gemachten Voraussetzungen, die sich leicht verallgemeinern

ließen) das Produkt zweier zur Klasse $\varphi(x)$ gehöriger Funktionen wieder eine solche Funktion. Allgemein gilt: Wenn α und β zwei reelle Zahlen sind, so ist

$$\varphi_\alpha(x)\,\varphi_\beta(x) = \varphi_\gamma(x) + r(x); \tag{32}$$

hier ist $\gamma = \alpha + \beta$ und $r(x)$ eine rationale Funktion mit Polen höchstens bei $x = 1$ und $x = \infty$, über deren Höhe sich noch Aussagen machen lassen. Nur wenn $\alpha + \beta$ eine ganze Zahl ist, kann $\varphi_\alpha(x)\,\varphi_\beta(x)$ eindeutig werden, dann fällt $\varphi_\gamma(x)$ auf der rechten Seite weg.

Es möge als Beispiel derjenige Fall dieses Produktsatzes betrachtet werden, wo $\varphi_\alpha(x) = (1 - x)^\alpha$ (α nicht ganzzahlig) und $\varphi_\beta(x)$ sich auf $\varphi(x)$ reduziert; zu $\varphi(x)$ mögen die Funktionen $v(\tau)$, $s(\xi)$, $t(w)$, $T(w)$ gehören. Als Sprungfunktion $s_\alpha(x)$ des Produkts $(1 - x)^\alpha \varphi(x)$ ergibt sich

$$s_\alpha(x) = \frac{\sin(-\alpha\pi)}{\pi}(\xi - 1)^\alpha\, T\left(\frac{1}{\xi - 1}\right)\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{\xi - 1}\right)\right) \tag{33}$$

und demgemäß nach dem ersten Abschnitt für die Koeffizienten b_ν^α der Potenzreihe $(1 - x)^\alpha \varphi(x) = \sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu^\alpha x^\nu$

$$b_\nu^\alpha = \frac{T(\nu)}{\Gamma(-\alpha)\,\nu^{\alpha+1}}(1 + \varepsilon_\nu) \qquad (\alpha \text{ nicht ganzzahlig}); \tag{34}$$

ist α eine ganze Zahl, so sind die b_ν^α mit den im ersten Abschnitt betrachteten Zahlen a_ν^α identisch, es gelten also die Abschätzungen (15), (18), d. h. für $n = -1, -2, -3\ldots$ bleibt die Formel (34) für b_ν^α giltig, während für $n = 0, 1, 2, 3\ldots$

$$b_\nu^n = \frac{(-1)^n\, t(\nu)}{\nu^{n+1}}\,\Gamma(n + 1)\,(1 + \varepsilon_\nu) \text{ wird.} \tag{35}$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß unter geeigneten Voraussetzungen über $s(\xi)$ auch die Funktionen $\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\beta(x)}$, $\frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx}$, $\int_0^x \varphi_\alpha(x)\,dx$ zur Klasse $\varphi_\alpha(x)$ gehören.

§ 3. Uber den Divergenzcharakter gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Durch Vergleichen der Koeffizientenabschätzungen des ersten und der Funktionsabschätzungen des zweiten Abschnitts gewinnt man von einer ganz neuen Seite her einen allgemeinen Satz, den zuerst Herr Pringsheim bewiesen hat (acta math. 26 (1903)). Die Potenzreihe $\sum_0^\infty {}^\nu b_\nu^a$ für die Funktion $(1-x)^a \varphi(x)$ sei bei $x = 1$ divergent (also $a \leqq 0$); setzt man

$$(36) \qquad \begin{gathered} x = 1 - \varrho^{-1} \cos\psi + i \varrho^{-1} \sin\psi \\ \left(\psi' \leqq \psi < \frac{\pi}{2},\ 0 < \varrho^{-1} < \varrho^{-1} \leqq 2\cos\psi'\right), \end{gathered}$$

so konvergiert $\sum_0^\infty {}^\nu b_\nu^a x^\nu$, und es ist nach (33), (28) für $a < 0$ und nach (27) für $a = 0$:

$$(37) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu b_\nu^a x^\nu = (1-x)^a\, T\left(\frac{1}{|1-x|}\right)(1+\varepsilon_\varrho)$$

mit $\lim_{\varrho=\infty} \varepsilon_\varrho = 0$ gleichmäßig für die obigen x; andererseits ist nach (34)

$$(38) \qquad b_\nu^{(a)} = \frac{T(\nu)}{\Gamma(-a)\,\nu^{a+1}}\,(1+\varepsilon_\nu) \text{ für } a < 0$$

und nach (35):

$$(39) \qquad b_\nu^{(0)} = \frac{t(\nu)}{\nu}\,(1+\varepsilon_\nu).$$

Die Abschätzung (37) bleibt offenbar richtig, wenn man für b_ν^a aus (38), (39) die Näherungswerte $\frac{T(\nu)}{\Gamma(-a)\,\nu^{a+1}}$, $\frac{t(\nu)}{\nu}$ einsetzt; tut man dies, so hat man den erwähnten Pringsheimschen Satz über das Verhalten der Reihen

$$\sum_0^\infty {}^\nu \frac{T(\nu)}{\nu^{a+1}} x^\nu \,(a < 0) \text{ und } \sum_1^\infty {}^\nu \frac{t(\nu)}{\nu} x^\nu \text{ bei } x = 1.$$

Durch besondere Wahl von $T(w)$ ergibt sich folgendes Beispiel (Pringsheim, a. a. O., S. 30), an das ich nachher weitere Ausführungen knüpfen werde.

Ist

$$A_\nu = (1+\varepsilon_\nu)\frac{\nu^\gamma}{L_{m-1}(\nu)(\lg_m \nu)^\sigma (\lg_{m+1}\nu)^{\sigma_1}\cdots(\lg_{m+k}\nu)^{\sigma_k}} \quad (m \geqq 1), \tag{40}$$

so hat man, falls $\gamma < 0$, $\sigma \gtrless 1$:

$$\lim_{x=1}(1-x)^{\gamma+1} L_{m-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\lg_m \frac{1}{1-x}\right)^\sigma \left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_1}\cdots \left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_k} \cdot \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu x^\nu = \Gamma(\gamma), \tag{41}$$

dagegen für $\gamma = 0$, in welchem Falle allemal $\sigma < 1$ sein muß $\left(\text{für } \sigma > 1 \text{ wäre ja } \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu \text{ konvergent}\right)$

$$\lim_{x=1}\left(\lg_m \frac{1}{1-x}\right)^{\sigma-1}\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_1}\cdots \left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_k}\sum_0^\infty A_\nu x_\nu = \frac{1}{1-\sigma}. \tag{42}$$

Führt man nun in (41), (42) an Stelle von x die neue Veränderliche $\frac{x-\varkappa}{1-\varkappa}$ mit $\varkappa > 0$, < 1 ein und beachtet man, daß gleichmäßig für alle x des Gebietes (36)

$$\lim_{x=1}\frac{\lg_m \frac{1}{1-x}}{\lg_m \frac{1}{1-\frac{x-\varkappa}{1-\varkappa}}} = \lim_{x=1}\frac{\lg_m \frac{1}{1-x}}{\lg_m \frac{1-\varkappa}{1-x}} = 1 \text{ ist,} \tag{43}$$

wie man durch den Schluß von m auf $m+1$ beweist, so geht die vorige Aussage über in folgende:

Ist

$$A_\nu = \frac{\nu^\gamma (1-\varkappa)^{\gamma-\nu}}{L_{m-1}(\nu)(\lg_m \nu)^\sigma(\lg_{m+1}\nu)^{\sigma_1}\cdots(\lg_{m+k}\nu)^{\sigma_k}}(1+\varepsilon_\nu) \quad (m > 1), \tag{44}$$

so hat man, falls $\gamma > 0$, $\sigma \gtrless 1$:

$$\lim_{x=1} (1-x)^{\gamma+1} L_{m-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\lg_m \frac{1}{1-x}\right)^{\sigma}\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_1}\cdots$$

$$(45) \qquad \left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_k}\sum_0^\infty \nu\, A_\nu (x-\varkappa)^\nu = \Gamma(\gamma),$$

dagegen für $\gamma = 0$, $\sigma < 1$:

$$(46) \qquad \lim_{x=1}\left(\lg_m \frac{1}{1-x}\right)^{\sigma-1}\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_1}\cdots \left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_k}\cdot\sum_0^\infty \nu\, A_\nu (x-\varkappa)^\nu = \frac{1}{1-\sigma}.$$

Bei diesen Grenzübergängen ist natürlich x auf jenen Teil des Gebietes (36) zu beschränken, der innerhalb des Kreises $|x-\varkappa| = 1-\varkappa$ liegt.

Es möge nun noch $\varkappa$ so nahe an 1 vorausgesetzt werden, daß die Funktionen $\lg_\mu \frac{1}{1-x}$ $(\mu = 1, 2 \ldots m+k)$ sich im Kreise $|x-\varkappa| = 1-\varkappa$ regulär verhalten. Dann legen die Sätze (45), (46) die Vermutung nahe, daß umgekehrt die Entwickelung von

$$\Gamma(\gamma)(1-x)^{-\gamma-1} L_{m-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\lg_m \frac{1}{1-x}\right)^{-\sigma}\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{-\sigma_1}\cdots\left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{-\sigma_k}$$

für $\gamma > 0$ und von

$$\frac{1}{1-\sigma}\left(\lg_m \frac{1}{1-x}\right)^{1-\sigma}\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{-\sigma_1}\left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{-\sigma_k}$$

Koeffizienten haben wird, die der Grenzgleichung (44) genügen; man wird sogar vermuten, daß diese Koeffizientenabschätzung richtig bleibt, wenn man die bisher γ und σ auferlegten Beschränkungen fallen läßt.

Das Bestreben, diese Vermutungen zu beweisen, war für mich mitbestimmend, als ich die vorliegenden Untersuchungen in Angriff nahm. Den Beweis, der nach den Ausführungen des ersten Abschnitts keine Schwierigkeit mehr macht, bringe ich im nächsten Paragraphen.

§ 4. Abschätzung der Taylor-Koeffizienten der Funktionen[1] $(1-x)^\gamma \left(\lg\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_1}\left(\lg_2\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_2}\cdots\left(\lg_m\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_m}$.

Das Verhalten der Funktionen $\left(\lg_\mu\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_\mu}$ $(\mu \geqq 1;\ -\infty < \sigma_\mu < +\infty)$, die sämtlich zur Klasse der φ-Funktionen gehören, in der rechtsseitigen Umgebung der Stelle $\xi = 1$ des Schnittes C sind durch folgende Formeln beschrieben, in denen $\xi - 1 = \varrho^{-1}$ gesetzt ist:

$$\lg\frac{1}{1-x} = \lg\varrho \pm i\pi,$$

(47)
$$\text{allgemein } \lg_\mu\frac{1}{1-x} = (1+\varepsilon_\varrho)\lg_\mu\varrho \pm \frac{i\pi(1+\varepsilon_\varrho')}{\lg\varrho\lg_2\varrho\ldots\lg_{\mu+1}\varrho}$$
$$\lg\left(\frac{1}{1-x}\right)^\sigma = (\lg\varrho)^\sigma\left(1+\frac{\sigma i\pi(1+\varepsilon_\varrho)}{\lg\varrho}\right),$$
$$\left(\lg_\mu\frac{1}{1-x}\right)^\sigma = (1+\varepsilon_\varrho)(\lg_\mu\varrho)^\sigma \pm \frac{\sigma i\pi(1+\varepsilon_\varrho')(\lg_\mu\varrho)^\sigma}{\lg\varrho\lg_2\varrho\ldots\lg_\mu\varrho}$$

Man findet hier den durch die Gleichungen (23), (24) festgestellten Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil der φ-Funktionen bestätigt; die Anwendung der Formeln (15), (18), (21) liefert ohne weiteres folgenden Satz:

Die Koeffizienten $a_\nu^\alpha(\varkappa)$ der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\varkappa)$ für

$$(48)\quad (1-x)^\alpha\left(\lg_m\frac{1}{1-x}\right)^\sigma\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_1}\cdots\left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_k}$$

sind gleich

$$(49)\quad \frac{\nu^{-\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(1-\varkappa)^{\nu-\alpha}}(1+\varepsilon_\nu)\sigma\cdot\frac{(\lg_m\nu)^\sigma(\lg_{m+1}\nu)^{\sigma_1}\ldots(\lg_{m+k}\nu)^{\sigma_k}}{L_{m-1}\nu},$$

wenn α eine ganze Zahl $\geqq 0$ ist, in jedem anderen Falle aber gleich

$$(50)\quad \frac{\nu^{-\alpha-1}(1+\varepsilon_\nu)}{\Gamma(-\gamma)(1-\varkappa)^{\nu-\alpha}}(\lg_m\nu)^\sigma(\lg_{m+1}\nu)^{\sigma_1}\cdots(\lg_{m+k}\nu)^{\sigma_k},$$

---

[1]) Von diesen Abschätzungen scheinen nur die allereinfachsten Fälle bekannt zu sein; am weitesten reichen noch die Ergebnisse des Herrn

$a, \sigma, \sigma_1 \ldots \sigma_m$ können irgend welche reelle Zahlen sein; nur wenn $\sigma = \sigma_1 = \sigma_k = 0$, soll selbstverständlich a keine positive ganze Zahl sein.

Ich behaupte weiter:

Die Formel (49) gilt bei ganzzahligem a auch für beliebige komplexe $\sigma, \sigma_1 \ldots \sigma_k$ (außer $\sigma = \sigma_1 = \cdots = \sigma_k = 0$); die Formel (50) gilt, wenn a eine beliebige, auch komplexe, nur nicht positive ganze Zahl ist, und wenn $\sigma, \sigma_1, \ldots \sigma_k$ beliebige, auch komplexe Zahlen sind.

Eines neuen Beweises bedarf es nicht; man hat nur folgende zwei Tatsachen zusammenzuhalten:

1. Die Formeln (47) gelten auch für komplexe $\sigma, \sigma_1 \ldots \sigma_k$, die zugehörigen s, v, t, T-Funktionen sind dann natürlich auch komplex, aber ihre Real- und Imaginärteile einzeln gehören zu den vermöge der ersten Verallgemeinerung (S. 269) zugelassenen Funktionen.

2. Die Funktionen $\varphi_a(x)$ können auch für komplexe a definiert werden: durch $\int\limits_1^\infty \frac{(\xi-1)^a s(\xi)}{\xi - x} d\xi$, falls $-1 < \Re(a) \leqq 0$ und durch (17) für alle andern a. Man überzeugt sich, daß dann nicht nur die gefundenen Formeln für a_ν^a und b_ν^a weiter gelten, sondern auch deren Beweise, letztere mit ganz geringfügigen und ohne weiteres ersichtlichen Abänderungen.

Viele der bisherigen Abschätzungen hätten durch Aussagen über die Größenordnung der ε_ν verschärft werden können; ich will dies nur an dem Beispiele der Koeffizienten a_ν^a für die Potenzreihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu a_\nu^a x^\nu$ der Funktion $\varphi_a(x) = (1-x)^a (\lg(1-x))^k$ (a beliebig; k ganz, > 0) näher ausführen. Abschätzungsfehler, die für $\lim \nu = \infty$ kleiner als ϑ^ν mit festem positivem $\vartheta < 1$

Perron (Münch. Ber. 1913, S. 355), die sich auf die Koeffizienten von $(1-x)^\gamma (\lg 1 - x)^n$ bei beliebigem, auch komplexem γ und ganzzahligem $n > 0$ beziehen.

sind, bleiben von vornherein außer Betracht; um mich kurz auszudrücken, schreibe ich ϑ_ν, ϑ'_ν für ε_ν, wo es sich um solche Größen handelt.

Zur Vorbereitung mache ich folgenden Ansatz:

$$(1-z)^\alpha = \left(\frac{\lg \frac{1}{z}}{1} - \frac{\left(\lg \frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\lg \frac{1}{z}\right)^3}{3!} - + \cdots \right)^\alpha$$

$$(51) \quad = \left(\lg \frac{1}{z}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{1} \lg \frac{1}{z} + \left(\frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha}{24}\right)\left(\lg \frac{1}{z}\right)^2 + \cdots \right)$$

$$= \sum_0^\infty {}^\mu P_\mu(\alpha) \left(\lg \frac{1}{z}\right)^{\alpha+\mu};$$

die $P_\nu(\alpha)$ sind Polynome ν^{ten} Grads in α; in einer gewissen Umgebung U der Stelle $z = 1$ und für alle α, deren Betrag unter einer endlichen Schranke bleibt, konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty {}^\mu P_\mu(\alpha) \left(\lg \frac{1}{z}\right)^{\alpha+\mu}$ gleichmäßig und das gleiche gilt von ihrer gliedweise gebildeten k^{ten} Ableitung nach α:

$$(52) \qquad (1-z)^\alpha (\lg(1-z))^k = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{d^k P_\mu(\alpha) \left(\lg \frac{1}{z}\right)^{\mu+\alpha}}{d\alpha^k}.$$

Für a_ν^α liefert der Cauchysche Integralsatz folgende Abschätzung, wo unter S die Seite 271 erklärte Schleife verstanden wird:

$$(53) \qquad a_\nu^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{(1-z)^\alpha (\lg(1-z))^k}{z^{\nu+1}} + \vartheta_\nu,$$

also unter der erlaubten Annahme, daß S ganz in U liegt:

$$(54) \quad \begin{aligned} a_\nu^\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \int_S \sum_0^l {}^\mu \frac{d^k P_\mu(\alpha) \left(\lg \frac{1}{z}\right)^{\mu+\alpha}}{d\alpha^k} \frac{dz}{z^{\nu+1}} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_S \sum_{l+1}^\infty {}^\mu \frac{d^k P_\mu(\alpha) \left(\lg \frac{1}{z}\right)^{\mu+\alpha}}{d\alpha^k} \frac{dz}{z^{\nu+1}} + \vartheta_\nu. \end{aligned}$$

Der zweite der drei Summanden auf der rechten Seite von (54) stellt den Koeffizienten von z^ν einer Funktion $\varphi_{a+l+1}(z)$ dar und ist nach der bekannten Bezeichnungsweise des Herrn Landau $O\left(\frac{(\lg\nu)^k}{\nu^{a+l+2}}\right)$. Wenn ich in dem vorausgehenden ersten Integral auf der rechten Seite von (54) die auf der reellen Achse liegenden Stücke des Schleifenintegrals bis $+\infty$ ausdehne, kommt nur ein Glied ϑ'_ν hinzu. Die so verlängerte Schleife bezeichnete ich mit S', und es ist also

$$(55)\quad a_\nu^a = \frac{1}{2\pi i}\sum_0^l{}^\mu \frac{d^k}{d_a^k}\left(P_\mu(a)\int_{S'}\frac{\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{a+\mu}}{z^{\nu+1}}\,dz\right) + O\left(\frac{(\lg\nu)^k}{\nu^{a+l+2}}\right).$$

Jetzt stehen auf der rechten Seite neben $O\left(\frac{(\lg\nu)^k}{\nu^{a+l+2}}\right)$ nur bekannte Funktionen und deren Ableitungen, da ja

$$(56)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{S'}\frac{\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{-a-1}}{z^{\nu+1}} = \frac{\nu^a}{\Gamma(a+1)}.$$

Der besondere Fall $l = 1$ der sehr genauen Abschätzung (55) ist schon von Herrn Perron in der S. 280/281 genannten Abhandlung auf anderem Wege bewiesen worden.

§ 5. Über Funktionen, die durch Potenzreihen $\sum_1^\infty{}^\nu G\left(\nu^{\frac{1}{k}}\right)x^\nu$ definiert sind. Die zuletzt benutzte Hilfsformel aus der Theorie der Γ-Funktion ist auch sonst nützlich zur Untersuchung mehrdeutiger Funktionen. Es sei beispielsweise k eine ganze Zahl >1 und $\lim_{\mu=\infty}\sqrt[\mu]{|c_\mu|} = 0$; dann ist

$$(57)\qquad G(z) = \sum_1^\infty{}^\mu \frac{c_\mu z^\mu}{\Gamma\left(\frac{\mu}{k}+1\right)}$$

eine ganze Funktion, höchstens vom Minimaltypus der Ordnung k. Aus (56) erhält man, indem man $a = \frac{\mu}{k}$ setzt ($\mu = 1, 2, 3 \ldots$) und summiert:

$$(58)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{S'} \frac{\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{-1}\sum_1^\infty{}^\mu c_\mu \left(\lg\frac{1}{z}\right)^{-\frac{\mu}{k}}}{z^{\nu+1}} = G\left(\nu^{\frac{1}{k}}\right).$$

Darin liegt folgender Satz:

Die Potenzreihe $\sum_1^\infty{}^\nu G\left(\nu^{\frac{1}{k}}\right) x^\nu$ ist das Element einer in der längs C aufgeschnittenen Ebene regulären Funktion

$$(59)\qquad \Phi(x) = \frac{x}{2\pi i}\int_{S'} \frac{\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{-1}\sum_1^\infty{}^\mu c_\mu \left(\lg\frac{1}{z}\right)^{-\frac{\mu}{k}}}{z(z-x)}\, dz.$$

Längs C erleidet dieselbe den Sprung

$$(60)\qquad s(\xi) = \sum_1^\infty{}^\mu c_\mu \left(\lg\frac{1}{\xi}\right)^{-1-\frac{\mu}{k}} \sin\frac{\mu}{k}\pi.$$

Da $\lg\frac{1}{x}$ in der Umgebung von $x=1$ regulär ist, verhält sich somit $\Phi(x)$ daselbst wie eine ganze Funktion von $(x-1)^{-\frac{1}{k}}$.

Mit genau den nämlichen Mitteln beweist man beispielsweise ferner, daß die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$, wo a_ν für $\nu > \nu'$ die Form $\mathfrak{P}\left(\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$ hat, Element einer Funktion ist, die in der längs der reellen Achse $1\,\infty$ aufgeschlitzten Ebene regulär ist, und die sich bei $x=1$ wie eine reguläre Funktion von $(x-1)^{\frac{1}{k}}$ verhält. Wenn man die Formel (56), nachdem man sie beiderseits mit $\Gamma(a+1)$ multipliziert hat, k mal nach a differenziert, mit x^ν multipliziert und sodann summiert, gelangt man zu Reihen $\sum_1^\infty{}^\nu \nu^a (\lg\nu)^k x^\nu$, und man ersieht ohne weiteres, daß auch die so gebildeten Funktionen innerhalb der längs C aufgeschnittenen Ebene regulär sind und daß ihre Sprungfunktionen, mithin ihre Fortsetzungen über C hinaus mittels bekannter elementarer Funktionen gebildet werden können.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit lauter geradlinigen Charakteristiken.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 1. Dezember 1917.

Die folgenden Ausführungen erledigen die Bestimmung aller partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit lauter geradlinigen Charakteristiken, eine Aufgabe, die trotz des einfachen Ergebnisses, zu dem ihre Lösung führt, bisher noch nicht vollständig behandelt worden ist[1]).

Für den R_3 freilich kennt man die Antwort schon lange: Die ∞^3 Geraden eines Komplexes müssen, um den Inbegriff aller Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zu bilden, die Tangenten einer Fläche oder die Treffgeraden einer Kurve sein. Zu dieser notwendigen Bedingung kommt als selbstverständliche Nebenforderung hinzu, daß die Fläche nicht etwa eine abwickelbare Fläche bzw. die Kurve keine Gerade sein darf. ∞^2 Gerade aber, die nicht alle einer und derselben Ebene angehören, sind immer die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, wobei dann jede Gerade Träger von ∞^1 charakteristischen Streifen ist.

---

[1]) Herr Prof. F. Engel in Gießen hat mich in liebenswürdiger Weise auf die Unvollständigkeit des in diesen Berichten 1914, S. 344 ausgesprochenen Ergebnisses aufmerksam gemacht. Es mußten ganz neue Kriterien aufgestellt werden, um die Frage, deren vollständige Behandlung zunächst unmöglich erschien, zu einem befriedigenden Abschluß zu bringen. — Die Frage ist für den R_3 zuerst von P. Dubois-Reymond aufgeworfen, von Lie beantwortet worden. (Vgl. Math. Enc. III D 7, S. 460.)

Um die Frage in voller Allgemeinheit in Angriff zu nehmen, sind einige Vorbereitungen nötig, die an mehr oder weniger bekannte Dinge erinnern sollen.

Die Gesamtheit der ∞^{n-1} Elemente $E_n(z, x_1, \ldots x_n, p_1 \ldots p_n)$, welche die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0 \ldots \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$$

einem Punkt $P(x_1, \ldots x_n, z)$ des R_{n+1} zuordnet, können als Umhüllungsgebilde einen Mongeschen Kegel von ∞^{n-1}, ∞^{n-2}, $\ldots \infty^1$ Linienelementen oder schließlich eine „nullgliedrige Schar", d. h. ein einziges oder lauter diskrete Linienelemente besitzen. Der letztgenannte Fall ist übrigens trivial, man kommt dabei auf lineare Differentialgleichungen. In den übrigen Fällen ist jedes der genannten Linienelemente $(x_1', \ldots x_n', z')$ im Punkte P Träger von einem, von ∞^1, $\infty^2 \ldots \infty^{n-2}$ Elementen E_n der Differentialgleichung. Da diese nun immer ∞^{2n-1} charakteristische Streifen besitzt, deren jeder eine Charakteristik oder charakteristische Kurve als Träger hat, so ist im ersten (dem „allgemeinen") Fall jeder Punkt Ausgangspunkt von ∞^{n-1} Charakteristiken. In den anderen Fällen könnte man vermuten, daß jede Charakteristik Träger von ∞^1, $\infty^2 \ldots$ usw. Streifen wird.

Beispielsweise liegt folgender Schluß nahe: Liegt im R_4 eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung vor, so gehen gewiß von jedem Punkt ∞^2 charakteristische Streifen aus. Wenn dann die Differentialgleichung jedem Punkt einen Mongeschen Kegel von nur ∞^1 Linienelementen zuweist, so ist jedes dieser Linienelemente gewiß Träger von ∞^1 Elementen $E(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3)$ der Differentialgleichung. Aus diesen richtigen Prämissen wird der übereilte Schluß nahe gelegt, daß dann jedes dieser Linienelemente nur *eine* charakteristische Kurve aussendet, die aber Träger von ∞^1 charakteristischen Streifen wird. Dieser Fall tritt indessen durchaus nicht immer ein, ist vielmehr eine *Ausnahme*.

Es dürfte zweckmäßig sein, sich diese Einsicht in die Charakteristikenlehre durch Beispiele zu verschaffen, die auch in anderer Hinsicht förderlich sind.

Im übrigen mag es gestattet sein, dem Gebot der Stunde folgend, einige Abkürzungen für beständig gebrauchte Wörter einzuführen:

Ch., ch. K. = Charakteristik oder charakteristische Kurve,
ch. Str. = charakteristischer Streifen,
g. = geradlinig,
L. = Linienelement,
M. K. = Mongesche Kegel,
p. Dg. 1. O. = partielle Differentialgleichung erster Ordnung,
T. = Träger,
z. B.: Punkt als T. von L. oder E_n (Elementen $z\, x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n$), Gerade als T. von ch. Str.

Wir behandeln jetzt, wie angekündigt, zunächst *zwei Beispiele* von p. Dg. 1. O. im R_4 und wollen damit einem *dreifachen* Zweck dienen. Das erste Beispiel ist eine p. Dg. 1. O. im R_4 mit M. K., die nur ∞^1 L. enthalten, obwohl die Dg. ∞^5 und nicht nur ∞^4 Ch. besitzt. Es weist also auf die oben besprochenen Verhältnisse hin. Ferner dienen beide Beispiele dazu, das bei unseren Untersuchungen unvermeidliche *Multiplikatorenverfahren* in konkreten Fällen durchzuführen. Das zweite Beispiel wird sich als eine Dg. mit nur ∞^4 ch. Str. erweisen und in seinem Bau einen Fingerzeig dafür geben, wo die Dg. mit lauter g. ch. K. zu suchen sind.

Die *erste* Dg. im $R_4\,(x, x_1, x_2, z)$ sei vermittelt gegeben durch die vier Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} v^2 + u_1^2 + u_2^2 = 1, \\ u_2 = u_1 x - x_1, \\ v = p + p_1 u_1 + p_2 u_2, \\ v(p_1 + p_2 x) + u_1 + u_2 x = 0. \end{cases}$$

Hier könnte man aus den drei letzten Gleichungen u_1, u_2 und v durch x, x_1, p, p_1 und p_2 ausdrücken und erhielte durch Einsetzen in die erste Gleichung dann die p. Dg. 1. O. Wir

wollen aber die Dg. für die ch. Str. in der Weise aufstellen, daß wir in

$$dp\,\delta x + dp_1\,\delta x_1 + dp_2\,\delta x_2 - \delta p\,dx - \delta p_1\,dx_1 - \delta p_2\,dx_2 = 0$$

die Koeffizienten der vermöge (1) noch frei bleibenden Variationen einzeln gleich Null setzen. Wir führen zu diesem Zweck *Multiplikatoren* ein und erhalten

$$\begin{aligned} dp\,\delta x + dp_1\,\delta x_1 + dp_2\,\delta x_2 - \delta p\,dx - \delta p_1\,dx_1 - \delta p_2\,dx_2 \\ + \lambda_1\,dt(v\,\delta v + u_1\,\delta u_1 + u_2\,\delta u_2) \\ + \lambda_2\,dt(\delta u_2 - x\,\delta u_1 - u_1\,\delta x + \delta x_1) \\ + dt(-\delta v + p_1\delta u_1 + p_2\delta u_2 + \delta p + u_1\delta p_1 + u_2\delta p_2) \\ + \mu\,dt((p_1 + p_2 x)\,\delta v + \delta u_1 + x\delta u_2 + (u_2 + vp_2)\,\delta x + v\delta p_1 \\ + vx\,\delta p_2) = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir hierin zunächst die Faktoren von δu_1, δu_2 und δv gleich Null, so kommt

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 - \lambda_2 x + p_1 + \mu &= 0, \\ \lambda_1 u_2 + \lambda_2 + p_2 + \mu x &= 0, \\ \lambda_1 v - 1 + \mu(p_1 + p_2 x) &= 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit x, die dritte mit $p_1 + p_2 x$, addiert sodann alle drei Gleichungen und berücksichtigt dabei die vierte Gleichung (1), so folgt

$$\mu(1 + x^2 + (p_1 + p_2 x)^2) = 0,$$

also

$$\mu = 0.$$

Durch Nullsetzen der Faktoren von δp, δp_1 und δp_2 erhält man dann

$$dx = dt,\quad dx_1 = u_1\,dt,\quad dx_2 = u_2\,dt$$

und dazu

$$dz = p\,dx + p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = dt(p + p_1 u_1 + p_2 u_2) = v\,dt.$$

Der einem Punkt des R_4 durch die p. Dg. zugewiesene M. K. ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} dx_2 &= x\,dx_1 - x_1\,dx, \\ dz^2 + dx_1^2 + dx_2^2 &= dx^2 \end{aligned}$$

und besteht aus ∞^1 Linienelementen.

Zur Bestimmung der ch. Str. haben wir also zunächst die drei Differentialgleichungen

$$x_1' = u_1, \;\; x_2' = u_2, \;\; z' = v,$$

in denen der Akzent die Differentiation nach der unabhängigen Veränderlichen x bedeutet. Setzt man dann die Koeffizienten von δx, δx_1 und δx_2 gleich Null, so kommt

$$p' - \lambda_2 u_1 = 0, \;\; p_1' + \lambda_2 = 0, \;\; p_2' = 0,$$

und hierzu treten die drei durch Nullsetzen der Koeff. von δu_1, δu_2, δv bereits gefundenen Gleichungen, in denen aber, wie festgestellt wurde, μ gleich Null zu setzen ist.

Als Dg. zur Bestimmung der ch. Str. erhält man schließlich

$$\begin{aligned} &x_1' = u_1, \;\; x_2' = u_2, \;\; z' = v, \\ (2) \qquad &p' + p_1' u_1 = 0, \;\; p_2' = 0, \\ &u_1 + v(p_1' x + p_2) = 0, \;\; u_2 + v(p_2 - p_1') = 0, \end{aligned}$$

und dazu treten selbstverständlich die Gleichungen (1). Wir suchen jetzt nach ch. Str. mit g. Tr., nach solchen also, bei denen

$$u_1' = u_2' = v' = 0$$

ist und finden aus (1) und (2) für diesen Fall die Bedingungen:

$$\begin{aligned} &p' + p_1' u_1 + p_2' u_2 = p' + p_1' u_1 = 0, \\ &v(p_1' + p_2) + u_2 = 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist wegen (2) erfüllt, und man erhält schließlich folgende ch. Str. mit g. Tr.:

$$\begin{aligned} &x_1 = u_1 x - u_2, \;\; x_2 = u_2 x + c_1, \;\; z = v x + c_2, \\ (3) \qquad &\qquad (v^2 = 1 - u_1^2 - u_2^2) \\ &p_1 = -\frac{u_1}{v}, \;\; p_2 = -\frac{u_2}{v}, \;\; p = v - p_1 u_1 - p_2 u_2 = \frac{1}{v}. \end{aligned}$$

Dabei sind u_1, u_2, c_1 und c_2 vier willkürliche Konstanten, also haben wir eine viergliedrige, in der Gesamtheit der ∞^5 ch. Str. enthaltene Schar von ch. Str. mit Geraden als Trägern. Die p. Dg. hat also notwendig ∞^5 und nicht nur ∞^4 ch. K., denn wäre letzteres der Fall, so müßte eben jede der berechneten viergliedrigen Schar angehörige Gerade T. von ∞^1 ch. Str. sein,

während wir doch soeben festgestellt haben, daß sie nur T. *eines einzigen* ch. Str. ist. Bei diesem Beispiel gehen also von jedem L. eines M. K. ∞^1 ch. K. aus, nicht nur eine einzige.

Ein *zweites*, kürzer zu behandelndes Beispiel macht uns mit einer einfachen p. Dg. 1. O. im R_4 bekannt, die nur ∞^4 durchweg geradlinige ch. K. besitzt. Die p. Dg. sei gegeben durch

$$
\begin{aligned}
&v^2 + u_1^2 + u_2^2 = 1,\\
(1') \qquad &u_1 x - x_1 = 0,\\
&v = p + p_1 u_1 + p_2 u_2,\\
&v p_2 + u_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Man findet wie oben

$$x_1' = u_1, \quad x_2' = u_2, \quad z' = v$$

und erhält die noch fehlenden Gleichungen, wenn man in

$$
\begin{aligned}
&dp\,\delta x + dp_1\,\delta x_1 + dp_2\,\delta x_2 + \lambda_1\,dx(v\,\delta v + u_1\,\delta u_1 + u_2\,\delta u_2)\\
&+ \lambda_2\,dx(-x\,\delta u_1 - u_1\,\delta x + \delta x_1) + dx(-\delta v + p_1\,\delta u_1 + p_2\,\delta u_2\\
&+ \delta p + u_1\,\delta p_1 + u_2\,\delta p_2) = 0
\end{aligned}
$$

die Koeffizienten der willkürlichen Variationen gleich Null setzt.

Die ∞^5 ch. Str., also die ganze fünfgliedrige Schar wird hier dargestellt durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&x_1 = u_1 x, \quad x_2 = u_2 x + c_1, \quad z = vx + c_2\\
(3') \qquad &(v^2 = 1 - u_1^2 - u_2^2)\\
&p_1 = -\frac{u_1}{v} + \frac{c_3}{x}, \quad p_2 = -\frac{u_2}{v}, \quad p = \frac{1}{v} + \frac{c_3}{x},
\end{aligned}
$$

wobei

$$u_1,\ u_2,\ c_1,\ c_2,\ c_3$$

fünf willkürliche Konstanten sind. Hier hat man also in der Tat nur ∞^4 charakteristische Kurven, und zwar gerade Linien; jede ist Träger von ∞^1 ch. Str.

Zu beachten ist, daß hier die ∞^4 Geraden *Treffgeraden zweier zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten* sind, nämlich der Ebene

$$x = x_1 = 0$$

und einer Mannigfaltigkeit zweiten Grades, die im Unendlichen liegt, und bei Einführung homogener Koordinaten

$$z : x : x_1 : x_2 : x_3$$

durch $$x_3 = 0, \quad z^2 + x_1^2 + x_2^2 - x^2 = 0$$

gegeben ist. Sowohl die Treffgeraden jener Ebene wie die Treffgeraden dieser unendlich fernen Mannigfaltigkeit zweiten Grades sind als Ausartungen von Tangentenkomplexen zu bezeichnen — und, wie wir hier an einem Beispiel sehen, daß die zwei (ausgearteten) Tangentenkomplexen gemeinsamen Geraden die ∞^4 ch. Str. einer p. Dg. 1. O. sind, so werden wir sehr bald feststellen können, *daß eine Geradenschar nur dann die ch. K. einer p. Dg. im R_n bildet, wenn die Geraden mehreren Tangentenkomplexen gleichzeitig angehören.*

Wir gehen nun zu der eigentlichen, durch unsere Beispiele ausreichend vorbereiteten Aufgabe über, der *Bestimmung aller p. Dg. 1. O. mit lauter geradlinigen Charakteristiken.*

Der Untersuchung unterworfen werden p. Dg. 1. O. im R_{n+m+1}, wobei die Zahl n angeben soll, wie viele Parameter der L. der M. K. willkürlich sind, mit andern Worten, die M. K. sollen aus ∞^n L. bestehen. Dabei soll $n > 0$ sein, denn $n = 0$ führt auf den trivialen Fall der linearen p. Dg. 1. O., wobei ja jede Ch. eo ipso Träger von ∞^{m-1} ch. Str. ist. (Dagegen ist für $m = 1$ jede Ch. eo ipso Tr. von einem und nur einem ch. Str.) Wir verlangen also jetzt, *es sollen in allgemeinster Weise ∞^{2n+m} Gerade so bestimmt werden, daß sie die einzigen charakteristischen Kurven einer p. Dg.* 1. O. *in R_{n+m+1} sind*, daß also jede von ihnen Tr. von ∞^{m-1} ch. Str. wird. (Im ganzen gibt es $\infty^{2n+2m-1}$ ch. Str., woraus sich für die „Tragstärke“ die Zahl $m - 1$ ergibt.)

Die Punktkoordinaten des R_{n+m+1} seien

$$x, x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m,$$

wir führen alsdann Linienkoordinaten ein durch die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{aligned} x_\nu &= r_\nu x + \varrho_\nu \ldots (\nu = 1, 2 \ldots n) \\ y_\mu &= s_\mu x + \sigma_\mu \ldots (\mu = 1, \ldots m) \end{aligned}$$

und nehmen an, daß die $(2n+m)$-gliedrige Geradenschar gegeben sei durch die Gleichungen

$$(5)\quad \sigma_\mu = f_\mu(r_1 \ldots r_n, s_1 \ldots s_m, \varrho_1 \ldots \varrho_n) \ldots (\mu = 1, 2 \ldots m).$$

Die (den Flächenelementen des R_3 entsprechenden) Elemente E_{n+m} sind bestimmt durch die $n+m+1$ Koordinaten des Punktes, der das Element trägt und durch die homogenen „*Stellungskoordinaten*"

$$p, p_1 \cdots p_n, q_1, \cdots q_m,$$

wobei die Bedingung vereinigter Lage zweier unendlich benachbarten Elemente darin besteht, daß die Pfaffsche Gleichung

$$p\,dx + p_1 dx_1 \cdots + p_n dx_n + q_1 dy_1 \cdots + q_m dy_m = 0$$

erfüllt ist.

Um zur Aufstellung der p. Dg. 1. O. zu gelangen, haben wir zunächst die Geraden durch einen Punkt zu bestimmen, also die Linienkoordinaten den Bedingungen

$$x\,dr_\nu + d\varrho_\nu = 0,\ x\,ds_\mu + d\sigma_\mu = 0$$

zu unterwerfen. Wegen (5) ist dann

$$(5')\ \sum_1^m{}^\mu \frac{\partial f_i}{\partial s_\mu} ds_\mu + \left(x + \frac{\partial f_i}{\partial s_i}\right) ds_i + \sum_1^n{}^\nu \frac{df_i}{dr_\nu} dr_\nu = 0 \ldots (i = 1, 2 \ldots m),$$

wobei die Bezeichnung

$$\frac{df_i}{dr_\nu} = \frac{\partial f_i}{\partial r_\nu} - x\frac{\partial f_i}{\partial \varrho_\nu}$$

gebraucht worden ist.

Diesen Differentialgleichungen sind die Linienelemente

$$x_\nu' = r_\nu,\ y_\mu' = s_\mu$$

des am Punkte

$$P(x, x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m)$$

haftenden M. K. unterworfen. Die p. D. selbst erhält man aus

$$(6)\qquad p + \sum_1^n{}^\nu p_\nu r_\nu + \sum_1^m{}^\mu q_\mu s_\mu = 0$$

und $$\sum_1^n {}^r p_r\, dr_r + \sum_1^m {}^\mu q_\mu\, ds_\mu = 0$$

mit Berücksichtigung von (5'), und zwar kommt

$$(7)\quad \begin{aligned} p_i &= \sum_1^m {}^\mu \tau_\mu \frac{df_\mu}{dr_i} = F_i \ldots (i = 1, 2 \ldots n), \\ q_k &= \sum_1^m {}^\mu \tau_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial s_k} + \tau_k x = G_k \ldots (k = 1, 2 \ldots m). \end{aligned}$$

Man hätte nunmehr die $2n + 3m$ Größen $(r_r, \varrho_r, s_\mu, \sigma_\mu, \tau_\mu)$ aus den

$$n + m + m + 1 + n + m = 2n + 3m + 1$$

Gleichungen (4), (5), (6) und (7) zu eliminieren, um die p. Dg. zu erhalten. Selbstverständlich kommt es nur darauf an, die Bedingung für die Möglichkeit der Elimination und dafür, daß dabei wirklich nur eine einzige Gleichung zwischen den Punktkoordinaten und den homogenen Stellungskoordinaten p, p_r und q_n entsteht, analytisch zu formulieren. Es ist also zu verlangen, daß die Determinante

$$(8)\quad D = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dr_1} \cdots \frac{df_1}{dr_n} & x + \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{df_m}{dr_1} \cdots \frac{df_m}{dr_n} & \frac{\partial f_m}{\partial s_1} & & x + \frac{\partial f_m}{\partial s_m} & 0 & & 0 \\ \frac{dF_1}{dr_1} \cdots \frac{dF_1}{dr_n} & \frac{\partial F_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial s_m} & \frac{df_1}{dr_1} & \cdots & \frac{df_m}{dr_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dF_n}{dr_1} \cdots \frac{dF_n}{dr_n} & \frac{\partial F_n}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial s_m} \cdots & \frac{df_1}{dr_n} & \cdots & \frac{df_m}{dr_n} \\ \frac{dG_1}{dr_1} \cdots \frac{dG_1}{dr_n} & \frac{\partial G_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial s_m} & x + \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial s_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dG_m}{dr_1} \cdots \frac{dG_m}{dr_n} & \frac{\partial G_m}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial s_m} & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} & & x + \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. In dieser Determinante hat man sich die ϱ_r vermöge (4) durch x, x_r, r_r ausgedrückt zu denken; ferner sind bei der Bildung von

$$\frac{dF_i}{dr_r} = \frac{\partial F_i}{\partial r_r} - x\frac{\partial F_i}{\partial \varrho_r} \cdots$$

usw. die Multiplikatoren τ_μ als Konstanten zu behandeln.

Wir nehmen also von jetzt als an

$$D \neq 0$$

und schreiten zur Bestimmung der Differentialgleichungen für die ch. Str. nach dem *Multiplikatorenverfahren.* Wir haben also in

$$\begin{aligned} dp\,\delta x - dx\,\delta p + \sum_1^n{}^r (dp_r\,\delta x_r - dx_r\,\delta p_r) + \sum_1^m{}^\mu (dq_\mu\,\delta y_\mu - dy_\mu\,\delta q_\mu) \\ + dt\left(\sum_1^n{}^r p_r\,\delta r_r + \sum_1^m{}^\mu q_\mu\,\delta s_\mu + \delta p + \sum_1^n{}^r r_r\,\delta p_r + \sum_1^m{}^\mu s_\mu\,\delta q_\mu\right) \\ + dt\cdot\sum_1^m{}^\mu \lambda_\mu(\delta f_\mu + x\,\delta s_\mu - \delta y_\mu) \\ + dt\cdot\sum_1^n{}^r \pi_r(-\delta p_r + \delta F_r) + dt\cdot\sum_1^m{}^\mu \varkappa_\mu(-\delta q_\mu + \delta G_\mu) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

die Koeffizienten der Variationen

$$\delta x,\ \delta x_r,\ \delta y_\mu,\ \delta p,\ \delta p_r,\ \delta q_\mu,\ \delta r_r,\ \delta s_\mu,\ \delta\tau_\mu$$

gleich Null zu setzen. Greift man zuerst die $2m+n$ Gleichungen heraus, die man durch Nullsetzen der Koeffizienten von $\delta\tau_\mu$, δr_r und δs_μ erhält, so kommen $2m+n$ lineare homogene Gleichungen für

$$\pi_r,\ \varkappa_\mu,\ \lambda_\mu + \tau_\mu$$

und die Determinante dieser Gleichungen ist gerade D, also der Voraussetzung nach von Null verschieden. Es wird also

$$\pi_r \cdots = \pi_n = \varkappa_1 \cdots = \varkappa_m = \lambda_1 + \tau_1 \cdots = \lambda_m + \tau_m = 0.$$

Wir erhalten dann aus (9)

$$dx = dt$$

und weiter, wenn wir x als unabhängige Veränderliche längs eines ch. Str. einführen, durch Nullsetzen der Koeffizienten der δp_ν und δq_μ in (9)

$$x'_\nu = r_\nu \cdots (\nu = 1 \cdots n) \tag{10}$$
$$y'_\mu = s_\mu \cdots (\mu = 1 \cdots m),$$

sodann durch Nullsetzen der Koeffizienten der δx_ν

$$p'_\nu + \sum_1^m{}^\mu \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_\nu} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$p'_\nu = \sum_1^m{}^\mu \tau_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_\nu} \cdots \quad (\nu = 1 \cdots n) \tag{11}$$

und durch Nullsetzen der Koeffizienten der δy_μ

$$q'_\mu - \lambda_\mu = 0 \qquad \text{oder}$$

$$q'_\mu = -\tau_\mu \cdots \quad (\mu = 1 \cdots m). \tag{12}$$

Nullsetzen der Koeffizienten von allen δr_ν und δs_μ in (9) führt nur auf (7) zurück.

Wir sind jetzt unmittelbar daran, die notwendigen Bedingungen dafür ausfindig zu machen, daß alle Ch. gerade Linien sind. Differenziert man nämlich jetzt die Gleichungen (7) unter Verwendung des Operationssymbols

$$(\quad)' = \sum_1^n{}^i r'_i \left(\frac{\partial}{\partial r_i} - x\frac{\partial}{\partial \varrho_i}\right) + \sum_1^m{}^k s'_k \frac{\partial}{\partial s_k}, \tag{13}$$

so erhält man

$$p'_\nu = \sum_1{}^\mu \left(\tau'_\mu \frac{d f_\mu}{d r_\nu} + \tau_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_\nu}\right) + (F_\nu)',$$

$$q'_\mu = \tau_\mu + x\tau'_\mu + \sum_1^m{}^\mu \tau'_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial s_\mu} + (G_\mu)',$$

oder mit Rücksicht auf (11) und (12)

$$\begin{aligned} 2\,p'_\nu &= \sum_1^m{}^\mu \tau'_\mu \frac{d f_\mu}{d r_e} + (F_\nu)' \\ 2\,q'_\mu &= x\tau'_\mu + \sum_1^m{}^\mu \tau'_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial s_\mu} + (G_\mu)'. \end{aligned} \tag{14}$$

Wir fordern, daß *alle* Ch. Gerade sein sollen, daß also

$$r_r' = \cdots = r_n' = s_1' \cdots s_m' = 0$$

ist, daher auch

$$(F_1)' = \cdots = (F_n)' = (G_1)' = \cdots = (G_m)' = 0.$$

Multiplizieren wir jetzt die Gleichungen für die $2q_\mu'$ (14) der Reihe nach mit

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_1} \cdots (\mu = 1, \cdots m)$$

und addieren zur Gleichung für $2p_1'$, berücksichtigen sodann (11) und (12), verfahren wir allgemein in dieser Weise, indem wir mit

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r}$$

multiplizieren und zur Gleichung für $2p_r'$ addieren, so kommt

$$\sum_1^m{}^\mu \tau_\mu' \Phi_{\mu r} = 0 \cdots (r = 1, \cdots n), \tag{15}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\begin{aligned} &\frac{df_\mu}{dr_r} + \frac{\partial f_1}{\partial \varrho_r}\frac{\partial f_\mu}{\partial s_1} + \cdots + \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r}\left(x + \frac{\partial f_\mu}{\partial s_\mu}\right) + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial \varrho_r}\frac{\partial f_\mu}{\partial s_m} \\ &= \frac{\partial f_m}{\partial r_r} + \sum_1^m{}^k \frac{\partial f_k}{\partial \varrho_r}\frac{\partial f_\mu}{\partial s_k} = \Phi_{\mu r}. \end{aligned} \tag{16}$$

Es wird verlangt, daß jede der ∞^{2n+m} Geraden Tr. von ∞^{m-1} ch. Str. werden soll, also muß jedes Wertsystem

$$q_1, q_2 \cdots q_m$$

ein Anfangselement eines ch. Str. liefern, dessen Tr. eine Gerade ist, d. h. wie man auch in (7) die

$$\tau_\mu = q_\mu'$$

oder in (14) die τ_μ' wählt, immer soll (15) erfüllt sein. Es müssen also alle $\Phi_{\mu r}$ gleich Null sein.

Damit haben wir den Satz gewonnen:

Damit die Gleichungen (4) *bis* (7) *eine p. Dg. 1. O. im* R_{n+m+1} *ergeben, deren Ch. einzig und allein die durch* (5) *gegebenen* ∞^{2n+m} *Geraden sind, ist notwendig, daß die* $m \cdot n$ *Gleichungen*

$$\Phi_{\mu r} = 0 \tag{17}$$

bestehen.

Im übrigen sei nochmals die *Nebenforderung* hervorgehoben, daß die durch (8) definierte Determinante (D) von Null verschieden sein muß; dies war ja die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gleichungen (4) bis (7) überhaupt auf eine p. Dg. 1. O. führen.

Wir haben nunmehr noch nachzuweisen, daß die $m \cdot n$ Bedingungen — unter der selbstverständlichen Voraussetzung

$$D \neq 0,$$

wie kaum mehr hervorgehoben zu werden braucht — auch *hinreichend* sind.

Wenn man zunächst annimmt, daß die

$$r_1' \ldots r_n', \; s_1' \ldots s_m'$$

nicht alle Null sind, also auch die $(F_r)'$ und $(G_\mu)'$ nicht alle gleich Null, so ergibt jetzt die oben ausgeführte Multiplikation und Addition statt (15) die n Gleichungen

$$\sum_1^m{}^\mu \tau_\mu' \Phi_{\mu r} + (F_r)' + \sum_1^m{}^\mu (G_\mu)' \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r} = 0 \cdots (\nu = 1, \ldots n). \tag{15'}$$

Wenn dann alle $\Phi_{\mu r}$ gleich Null sind, so hat man zur Bestimmung von $r_1' \ldots r_n', s_1' \ldots s_m'$ neben den Gleichungen

$$\sum_1^n{}^r \frac{d f_i}{d r_r} r_r' + x \frac{\partial f_i}{\partial s_i} s_i' + \sum_1^n{}^\mu \frac{\partial f_i}{\partial s_\mu} s_\mu' = 0 \cdots (i = 1, \cdots m),$$

die aus (4), (5) und (10) folgen, noch

$$(F_r)' + \sum_1^m{}^\mu (G_\mu)' \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r} = 0 \cdots r = (1 \cdots n). \tag{15''}$$

Dies sind im ganzen $m + n$ lineare homogene Gleichungen, denen die Differentialquotienten $r_1' \dots r_r'$, $s_1' \dots s_\mu'$ genügen müssen. Die Determinante Δ dieser Gleichungen hängt nun mit der Determinante D aufs engste zusammen. In D sind alle Glieder, welche in dem m ersten Zeilen und zugleich in den m letzten Reihen stehen, gleich Null. Wenn man dann die m letzten Zeilen mit

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_1} \cdots (\mu = 1, \cdots m)$$

multipliziert und zur $(m + 1)$-ten Zeile addiert, so gehen die m letzten Glieder dieser Zeile über in

$$\Phi_{11}, \Phi_{21} \dots \Phi_{m_1};$$

ebenso wenn man mit

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_2} \cdots (\mu = 1 \cdots m)$$

multipliziert und zur (m + 2)-ten Reihe addiert, so gehen die m letzten Glieder über in

$$\Phi_{12}, \Phi_{22}, \dots \Phi_{m2}$$

usw. Führt man dieses Verfahren durch, so erkennt man, daß, wenn die $\Phi_{\mu r}$, wie wir ja voraussetzen, alle gleich Null sind, D sich gerade in das Produkt der beiden Determinanten Δ und

$$\tag{18} \begin{vmatrix} x + \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial s_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & x + \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial s_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_m} & \frac{\partial f_2}{\partial s_m} & x + & \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{vmatrix}.$$

Diese letztere Determinante ist auf keinen Fall identisch gleich Null, auch ist der Voraussetzung nach D und mithin Δ *von Null verschieden*, demnach ist beim Fortschreiten *längs eines jeden charakteristischen Streifens*

$$r_1' = r_2' \cdots = r_n' = s_1' = s_2' \cdots = s_n' = 0,$$

also sind, wenn D von Null verschieden ist und die $m \cdot n$ Bedingungen (17) erfüllt sind, die Tr. der ch. Str. in der Tat identisch mit den durch (5) gegebenen Geraden.

Damit sind die als *notwendig* erkannten Bedingungen (17) auch als *hinreichend* festgestellt. Selbstverständlich darf auch hier die in unserer Darlegung immer wieder betonte Forderung

$$D \neq 0$$

nicht vergessen werden!

Unsere Aufgabe bliebe unerledigt, wenn die *geometrische Deutung* der Gleichungen (17) bei Seite gelassen würde. Es gibt auf jeder Geraden des durch (5) gegebenen Systems m Punkte, in denen die Determinante (18) gleich Null ist, also kann man, und zwar auf m verschiedene Weisen,

$$x = \bar{x} \text{ und } \tau_\mu = \bar{\tau}_\mu \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

so wählen, daß

$$\bar{q}_k = \sum_1^m {}^\mu \bar{\tau}_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial s_k} + \bar{\tau}_k \bar{x} = 0 \tag{19}$$

wird. Wegen (17) ist dann auch

$$\bar{p}_i = \sum_1^m {}^\mu \tau_\mu \frac{d f_\mu}{d r_i} = 0. \tag{20}$$

Diese m Punkte, die man etwa als „*Streuungspunkte*" bezeichnen kann, bilden, wie wir nun sehen werden, m von den Geraden des Systems berührte Mannigfaltigkeiten.

Hat man eine Wurzel $\dot{x}$ von (18) gewählt, so kann man die τ_μ so bestimmen, daß die Verhältnisse

$$\bar{p}_1 : \bar{p}_2 : \cdots : \bar{p}_n' : \bar{q}_1 : \bar{q}_2 \cdots \bar{q}_m$$

die *unbestimmte Form*

$$0 : 0 \cdots : 0$$

erhalten; in Wirklichkeit sind die Verhältnisse der *Stellungskoordinaten* p_r, q_μ auch in den Streuungspunkten nicht unbe-

stimmt, vielmehr wird, wie man durch Differentiation nach x erkennt, in jedem „Streuungspunkt" $\overline{P}(\bar{x}, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n, \bar{y}, \ldots y_m)$

$$\bar{q}_1 : \bar{q}_2 : \cdots : \bar{q}_m : \bar{p}_1 : \bar{p}_2 : \cdots : \bar{p}_n$$

$$= \bar{\tau}_1 : \bar{\tau}_2 : \cdots : \bar{\tau}_m : \left(-\sum_1^m{}^\mu \bar{\tau}_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_1}\right) : \left(-\sum_1^m{}^\mu \bar{\tau}_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_2}\right)$$

$$\cdots : \left(-\sum_1^m{}^\mu \bar{\tau}_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_n}\right). \tag{21}$$

Man kann auch, da ja die Stellungskoordinaten homogene Veränderliche sind, sie den Größen auf der rechten Seite dieser Gleichung unmittelbar gleich setzen.

Setzt man jetzt

$$\Delta_i(x) = x\,d s_i + \sum_1^m{}^\mu \frac{\partial f_i}{\partial s_\mu} d s_\mu + \sum_1^n{}^r \frac{d f_i}{d r_r} d r_r$$

$$= \sum_1^u{}^\mu \frac{\partial f_i}{\partial s_\mu} d s_\mu + \sum_1^n{}^r \left(\frac{\partial f_i}{\partial r_r} d r_r + \frac{\partial f_i}{\partial \varrho_r} d \varrho_r\right)$$

$$+ x\,d s_i - \sum_1^n{}^r \frac{\partial f_i}{\partial \varrho_r}(d\varrho_r + x\,d r_r)$$

$$= d\sigma_i + x\,d s_i - \sum_1^n{}^r \frac{\partial f_i}{\partial s_r}(d\varrho_r + x\,d r_r),$$

so ist mit Rücksicht auf die Definition von $\bar{\bar{x}}$ und den $\overline{\tau_\mu}$:

$$\sum_1^m{}^i \bar{\tau}_i \Delta_i(\bar{x}) \equiv 0.$$

Anderseits wird

$$\bar{p}\,d\bar{x} + \sum_1^n{}^r \overline{p_r}\,d\overline{x_r} + \sum_1^m{}^\mu \overline{q_\mu}\,d\overline{y_\mu}$$

$$= \sum_1^n{}^r \bar{p}_r(d r_r - r_r d\bar{x}) + \sum_1^m{}^\mu \bar{q}_\mu(d\bar{y}_\mu - s_\mu d\bar{x})$$

und, wenn man noch beachtet, daß

$$d x_r - r_r d x = x d r_r + d\varrho_r,$$
$$d y_\mu - s_\mu d x = x d s_\mu + d\sigma_\mu$$

ist, so verwandelt sich der letzte Ausdruck nach (21) in

$$\sum_1^n{}^r \bar{p}_r(\bar{x}dr_r + d\varrho_r) + \sum_1^m{}^\mu \bar{q}_\mu\left(\varDelta_\mu(\bar{x}) + \sum_1^n{}^r \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r}(d\varrho_r + \bar{x}dr_r)\right)$$

$$= \sum_1^m{}^\mu \bar{\tau}_\mu\left(\varDelta_\mu(\bar{x}) + \sum_1^n{}^r \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r}(d\varrho_r + \bar{x}dr_r) - \sum_1^n{}^r \frac{\partial f_\mu}{\partial \varrho_r}(d\varrho_r + \bar{x}dr_r)\right)$$

$$= \sum_1^m{}^\mu \bar{\tau}_m \varDelta_\mu(\bar{x}) = 0.$$

Es ist also

$$\bar{p}\,d\bar{x} + \sum_1^n{}^r \bar{p}_r\,d\bar{x}_r + \sum_1^m{}^\mu \bar{q}_\mu\,d\bar{y}_\mu = 0,$$

d. h. die dem Ort der „Streuungspunkte“

$$\bar{P}(\bar{x}, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n, \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_m)$$

zugeordneten „Streuungselemente“

$$E_{n+m}(\bar{x}, \bar{x}_r, \bar{y}_\mu, \bar{p}_r, \bar{q}_\mu)$$

gehören dem Elementverein an, dessen Punktort von den Punkten $\bar{P}$ gebildet wird, die Geraden also sind Tangenten dieses geometrischen Ortes bzw. Treffgeraden, wenn seine Dimension nicht gleich $m+n$, sondern niedriger ist.

Damit ist die gesuchte geometrische Deutung gefunden:

Die ∞^{2m+n} *Geraden, welche durch* (5) *gegeben sind, müssen m Tangentenkomplexen angehören, wenn sie die Ch. einer p. Dg. 1. O. sein sollen.*

Unter einem *eigentlichen* „Tangentenkomplex“ sind dabei die Tangenten einer M_{n+m}, unter einem *ausgearteten* die Treffgeraden einer M_{n+m-1} zu verstehen. Die Treffgeraden einer M_{n+m-k} sind als Gerade aufzufassen, die k (im übrigen beliebige) durch M_{n+m-k} gehende M_{n+m-1} treffen, wobei dann jeder Treffpunkt mit der M_{n+m-k} als k-facher Streuungspunkt zu zählen ist. Auf die *Nebenforderung*, die hinzukommt, nämlich

$$D \neq 0$$

kommen wir nachher zurück und lassen dahingestellt, ob ihr ein *allgemein giltiger* geometrischer Sinn abgewonnen werden kann.

Beispiel: Im R_4 kommen als die Ch. einer p. D. 1. O. folgende Systeme von ∞^4 Geraden in Betracht:

1. die gemeinsamen Tangenten zweier dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten (M_3),
2. die Geraden, welche eine M_3 berühren und zugleich eine M_2 treffen,
3. die gemeinsamen Treffgeraden zweier M_2 (wovon oben S. 290 ein Beispiel behandelt ist),
4. die Treffgeraden einer Kurve.

Legt man nämlich durch die Kurve zwei M_2, so erkennt man, daß die ∞^4 Treffgeraden der Kurve zwei (ausgearteten) Tangentenkomplexen gleichzeitig angehören und daß die Schnittpunktpaare mit diesen beiden M_2 in je einen Punkt zusammenfallen.

Zum Schluß wollen wir als Beispiel die ∞^{n+1} *Treffgeraden einer Kurve* des $R_{n+1}(x, x_1 \ldots x_n)$ behandeln, die ja auf Grund des allgemeinen Satzes in Betracht kommen. In der Tat wird sich herausstellen, daß sie immer dann die Ch. einer p. Dg. 1. O. sind, wenn die Kurve nicht eine gerade Linie ist. Wir wollen diese Untersuchung hier durchführen, wobei sich nochmals Gelegenheit gibt, das schmiegsame Multiplikatorenverfahren anzuwenden.

Die Kurve sei gegeben durch

$$x = u, \quad x_\nu = u_\nu, \quad u_\nu = f_\nu(u) \ldots (\nu = 1 \ldots n).$$

Dann sind ihre Treffgeraden gegeben durch

$$x_\nu = f_\nu + r_\nu (x - u). \tag{22}$$

Dazu führen wir noch homogene Stellungskoordinaten p, $p_1 \ldots p_n$ ein, so daß die Bedingung für die vereinigte Lage zweier unendlich benachbarter Elemente wird:

$$p\,dx + \sum_1^n {}^\nu p_\nu\,dx_\nu = 0.$$

Wenn das Linienelement

$$x, x_1 \ldots x_n, \; x_1' = r_1 \ldots x_n' = r_n$$

in dem Element $x, x_1 \dots x_n, p, p_1 \dots p_n$ liegt, ist also

$$p + \sum_1^n {}^r p_r r_r = 0. \tag{23}$$

Hält man jetzt $x, x_1' \dots x_n$ fest, so wird wegen (22)

$$(f_r - r_\nu')\delta u + (x - u)\delta r_r = 0$$

und wegen (23)

$$\sum_1^n {}^r p_r \delta r_r = 0,$$

also

$$\sum_1^n {}^r p_r (f_r' - r_r) = 0. \tag{24}$$

Die p. Dg. 1. O. erhält man aus (22), (23), (24) durch Elimination von u und $r_1 \dots r_n$. Diese Elimination ist dann und nur dann möglich, wenn (24) die Variable u enthält, also wenn nicht etwa

$$f_1'' = f_2'' = \dots = f_n'' = 0,$$

d. h., *wenn die Kurve keine Gerade ist.*

Die Dg. für die ch. Str. erhält man durch das Multiplikatorenverfahren aus

$$dp\,\delta x - dx\,\delta p + \sum_1^n {}^r (dp_r\,\delta x_r - dx_r\,\delta p_r)$$

$$+ dt\left(\delta p + \sum_1^n {}^r (p_r \delta r_\nu + r_\nu \delta p_r)\right)$$

$$+ dt \sum_1^n {}^r \lambda_r ((x - u)\delta r_r + (f_r' - r_r)\delta u + r_r \delta x - \delta x_r)$$

$$+ \mu\, dt \sum_1^n {}^r ((f_r' - r_r)\delta p_r - p_r \delta r_r + p_r f_r'' \delta u).$$

Durch Nullsetzen der Faktoren von δr_r und δu kommt:

$$p_r + \lambda_r (x - u) - \mu p_r = 0$$

und

$$\sum_1^n {}^r (\lambda_r (f_r' - r_r) + \mu p_r f_r'') = 0.$$

Multipliziert man hier die n ersten Gleichungen bzw. mit $r_r - f_r$, die letzte mit $(x - u)$ und addiert, so folgt wegen (24)

$$\mu (x - u) \sum_1^n {}^r p_r f_r'' = 0,$$

und da in diesem Ausdruck die beiden andern Faktoren nicht identisch gleich Null sind, so wird

$$\mu = 0.$$

Man erhält dann für die ch. Str. das System

$$\begin{aligned}
&x_r' - r_r = 0, && (\text{Faktor von } \delta p_r)\\
&p' + \sum_1^n {}^r \lambda_r r_r = 0, && (\quad ,, \quad ,, \quad \delta x)\\
&p_r' - \lambda_r = 0, && (\quad ,, \quad ,, \quad \delta x_r)\\
&p_r + \lambda_r (x - u) = 0, && (\quad ,, \quad ,, \quad \delta r_r)
\end{aligned}$$

oder

$$(25) \quad x_r' = r_r, \;\; p_r + p_r'(x - u) = 0, \;\; p + p'(x - u) = 0,$$

wobei der Akzent die Differentiation nach der unabhängigen Veränderlichen x bedeutet.

(24) kann wegen (23) geschrieben werden

$$p + \sum_1^n {}^r p_r f_r = 0$$

und hieraus folgt durch Differentiation

$$p' + \sum_1^n {}^r p_r' f_r + u' \sum_1^n {}^r p_r f_r'' = 0$$

oder, wegen der aus (25) folgenden Proportionen

$$p' : p_1' \cdots : p_n' = p : p_1 \cdots : p_n$$

noch weiter

$$u' = 0,$$

und dann aus (22)

$$x_s' = r_r = (f_r - r_r) u' + r_r + r_r'(x - u)$$

oder

$$r_\nu' = 0,$$

d. h. *die ch. K. der durch (22) bis (24) gegebenen p. Dg. 1. O. sind eben die durch (22) gegebenen* ∞^{n+1} *Geraden*, und es sind $u, r_1 \ldots r_n$ die $n+1$ unabhängigen Parameter. —

Mit diesem einfachen Beispiel möge die Darlegung abgeschlossen werden, die an verschiedenen Stellen noch auf viel weitergehende Fragen hinweist und an einer einfachen Fragestellung mit durchsichtiger Antwort zeigen mag, daß die Gedankenwelt von Sophus Lie, an die sie anknüpft, noch mannigfacher Entwickelung fähig ist.

Zwei dieser Fragestellungen sollen zum Schluß berührt werden an der Hand eines einfachen Beispiels. Man betrachte zwei M_3 des R_4; die ∞^5 Tangenten der einen und die der andern sind dann die Ch. je einer p. Dg. 1. O. und die ∞^4 gemeinsamen Tangenten nach S. 302 die ch. K. einer dritten p. Dg. 1. O.

Der Satz: *Liegen im* R_4 *zwei fünfgliedrige Scharen von Ch. je einer p. Dg. 1. O. vor, die eine viergliedrige Schar gemein haben, dann stellt diese Schar die Ch. einer dritten p. Dg. 1. O. dar*, gilt also, wenn die Ch. *Gerade* sind.

Gilt er *allgemein*?

Die dritte Dg. hat übrigens mit der ersten (und mit der zweiten) nicht nur ∞^4 ch. K., sondern sogar ∞^4 ch. Str. gemein. Es gibt also Paare von p. Dg. 1. O. im R_4 *mit* ∞^4 *gemeinsamen ch. Str.*, eine Möglichkeit, die, wie ich auf Grund einer schriftlichen Mitteilung annehmen darf, bisher nicht beachtet worden ist und ebenfalls weitergehende Untersuchungen erfordert.



Über nichtnegative trigonometrische Polynome.

Von **Otto Szász.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 1. Dezember 1917.

Den Ausgangspunkt meiner Untersuchung bildet der folgende in einer Arbeit des Herrn Fejér[1]) enthaltene bemerkenswerte Satz:

A. Es sei

$$\tau(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \cdots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt \geq 0$$
$$(0 \leq t < 2\pi)$$

ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung, dann gibt es eine ganze rationale Funktion höchstens n-ten Grades

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n,$$

so daß für jedes reelle t

$$|\gamma(z)|^2_{z=e^{ti}} = \tau(t).$$

Schon Herr Fejér, sodann Herr F. Riesz, Herr Fekete und der Verfasser haben verschiedene Anwendungen dieses Satzes gegeben[2]). Ich fand mit Hilfe dieses Satzes einen Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Polynomen, die keinen negativen Wert annehmen, und zwischen gewissen Hermiteschen Formen. Auf Grund dieses Zusammenhanges konnte ich

---

[1]) L. Fejér, Über trigonometrische Polynome [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 146 (1915), S. 53—82], S. 55—59. Wie Herr Fejér bemerkt, wurde der vollständige Beweis erst von Herrn F. Riesz erbracht.

[2]) Man vgl. O. Szász, Über harmonische Funktionen und L-Formen. Erscheint in der „Mathematischen Zeitschrift“.

einige, teils neue, teils bekannte Sätze über trigonometrische Polynome und harmonische Funktionen beweisen. Späterhin ist es mir gelungen, einige dieser Sätze auf kürzerem Wege direkt aus Satz A) abzuleiten. Ich habe daher in meiner oben zitierten Arbeit den ursprünglichen Beweis dieser Sätze unterdrückt, um hier in einer besonderen Note — mich auf das allein Notwendige beschränkend — den einfacheren Beweis mitzuteilen. Die Resultate lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Es sei

$$1 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \cdots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt \geqq 0 \quad (0 \leqq t < 2\pi), \tag{1}$$

dann ist

1. $|\lambda_\nu - \mu_\nu i| \leqq 1 \quad \left(\nu = \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \left[\frac{n}{2}\right] + 2, \ldots, n\right),$

2. $\sum_1^n {}^s |\lambda_s - \mu_s i| \leqq n,$

3. $\sum_1^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}^\nu |\lambda_{2\nu} - \mu_{2\nu} i| \leqq \left[\frac{n}{2}\right],$

4. $\sum_0^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} {}^\nu |\lambda_{2\nu+1} - \mu_{2\nu+1} i| \leqq \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1\right)^{\frac{1}{2}}.$

Die Fälle, in denen hier einmal Gleichheit gilt, werden im Laufe der Untersuchung genau bestimmt.

Hieraus folgen entsprechende Ungleichungen für die Koeffizienten trigonometrischer Polynome ohne konstantes Glied.

§ 1.

Es werde $\mu_0 = 0$ gesetzt; ferner sei

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_s - \mu_s i = c_s \quad (s = 0, 1, \ldots, n),$$

dann ist offenbar

$$\tau(t) = \Re \sum_0^n {}^s c_s e^{sti},$$

und der Inhalt des Satzes A kann so ausgesprochen werden: Unter der Voraussetzung

$$1 + \Re \sum_{1}^{n}{}^{s} c_s e^{sti} \geqq 0 \quad (0 \leqq t < 2\pi)$$

lassen die c_ν folgende Darstellung zu:

$$1 = \sum_{0}^{n}{}^{s} |\gamma_s|^2, \; c_\nu = 2 \sum_{0}^{n-\nu}{}^{s} \gamma_{\nu+s} \bar{\gamma}_s \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Hieraus folgt[1])

$$|c_\nu| \leqq 2 \cdot \sum_{0}^{n-\nu}{}^{s} |\gamma_{\nu+s} \gamma_s| \leqq |\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2 + \cdots + |\gamma_{n-\nu}|^2$$
$$+ |\gamma_\nu|^2 + |\gamma_{\nu+1}|^2 + \cdots + |\gamma_n|^2; \tag{3}$$

es ist also jedenfalls

$$|c_\nu| < 2 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Ist nun $n - \nu < \nu$, also $\nu > \left[\frac{n}{2}\right]$, so ist sogar

$$|c_\nu| \leqq 1 \; \left(\nu > \left[\frac{n}{2}\right]\right). \tag{4}$$

In (4) gilt offenbar dann und nur dann Gleichheit, wenn in (3) Gleichheit gilt, also wenn:

1) $\left|\sum_{0}^{n-\nu}{}^{s} \gamma_{\nu+s} \bar{\gamma}_s\right| = \sum_{0}^{n-\nu}{}^{s} |\gamma_{\nu+s} \gamma_s|$,

2) $|\gamma_s| = |\gamma_{\nu+s}| \quad (s = 0, 1, \ldots, n - \nu)$,

und wenn

3) $|\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2 + \cdots + |\gamma_{n-\nu}|^2 = \frac{1}{2}$.

Ich setze

$$\gamma_s = \varrho_s e^{\vartheta_s i} \quad (s = 0, 1, \ldots, n), \tag{5}$$

ferner kann ich ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\vartheta_0 = 0$, also $\gamma_0 = \varrho_0 \geqq 0$ ist. Die Bedingungen 1)—3) gehen jetzt in die folgenden über:

---

[1]) Mit Hilfe der einfachen Ungleichung: $2ab \leqq a^2 + b^2$ $(a \geqq 0, \; b \geqq 0)$.

1′) $\vartheta_{\nu+s} - \vartheta_s \equiv \vartheta_\nu \pmod{2\pi} \quad (s = 1, 2, \ldots, n - \nu)$,

2′) $\varrho_{\nu+s} = \varrho_s \quad (s = 0, 1, \ldots, n - \nu)$,

3′) $\varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \cdots + \varrho_{n-\nu}^2 = \frac{1}{2}$.

Wählt man also $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-\nu}$ und $\vartheta_\nu = \vartheta$ beliebig aber so, daß 3) erfüllt ist, so sind durch 1) und 2) $\gamma_\nu, \ldots \gamma_n$ eindeutig bestimmt, und zwar ist

$$\gamma_{\nu+s} = \gamma_s e^{\vartheta i} \quad (s = 0, 1, \ldots, n - \nu).$$

Man erhält also

$$\sum_0^n{}^s \gamma_s z^s = \sum_0^{n-\nu}{}^s \gamma_s z + e^{\vartheta i} \sum_0^{n-\nu}{}^s \gamma_s z^{\nu+s} = \left(\sum_0^{n-\nu}{}^s \gamma_s z^s\right)(1 + e^{\vartheta i} z^\nu),$$

und hieraus

$$\left|\sum_0^n{}^s \gamma_s z^s\right|^2_{z=e^{ti}} = 2\left|\sum_0^{n-\nu}{}^s \gamma_s z^s\right|^2_{z=e^{ti}} \cdot [1 + \cos(\nu t + \vartheta)].$$

Der erste Faktor ist offenbar ein beliebiges nichtnegatives trigonometrisches Polynom $n - \nu$-ter Ordnung mit dem konstanten Gliede 1; es ist klar, daß jetzt $c_\nu = e^{\vartheta i}$ ist. Es gilt also der

Satz I. Ist

$$\tau(t) = 1 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \cdots + \lambda_n \cos n t + \mu_n \sin n t \geqq 0$$
$$(0 \leqq t < 2\pi), \tag{1}$$

so ist

$$|\lambda_\nu - \mu_\nu i| \leqq 1 \quad \left(\nu > \left[\frac{n}{2}\right]\right), \tag{6}$$

und Gleichheit gilt nur, falls $\tau(t)$ die Form hat

$$\tau(t) = [1 + \alpha_1 \cos t + \beta_1 \sin t + \cdots + \alpha_{n-\nu} \cos(n - \nu) t + \beta_{n-\nu} \sin(n - \nu) t]\,[1 + \cos(\nu t + \vartheta)],$$

wo der erste Faktor ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom und ϑ beliebig ist[1]).

---

[1]) Für reine Kosinuspolynome vgl. Fejér, a. a. O., § 4.

§ 2.

Aus (2) folgt

$$\sum_0^n {}^s |c_s| \leqq \sum_0^n {}^s |\gamma_s|^2 + 2 \sum_1^n {}^\nu \sum_0^{n-\nu} {}^s |\gamma_{\nu+s} \gamma_s| = \left(\sum_0^n {}^s |\gamma_s| \right)^2,$$

und hieraus

$$\sum_0^n {}^s |c_s| \leqq n + 1.$$

Benutzt man wieder die Bezeichnung (5), so sind offenbar für Gleichheit folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:

1) $\vartheta_{\nu+s} - \vartheta_s \equiv \vartheta_\nu \pmod{2\pi}$ $(s = 1, 2, \ldots, n - \nu;$ $\nu = 1, 2, \ldots, n)$,

2) $|\gamma_0| = |\gamma_1| = \cdots = |\gamma_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Aus 1) folgt für $s = 1$

$$\vartheta_{\nu+1} \equiv \vartheta_\nu + \vartheta_1 \pmod{2\pi} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

schreibt man ϑ statt ϑ_1, so ergibt sich

$$\gamma_s = \frac{1}{\sqrt{n+1}} e^{s\vartheta i} \quad (s = 0, 1, \ldots, n),$$

und die Bedingungen 1) und 2) sind jetzt erfüllt. Nun ist bekanntlich

$$\left| \sum_0^n {}^s e^{s(\vartheta+t)i} \right|^2 = n + 1 + 2n \cos(\vartheta + t) + \cdots + 2 \cos n(\vartheta + t),$$

und wir erhalten den

Satz II. Ist

$$\tau(t) = 1 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \cdots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt \geqq 0$$
$$(0 \leqq t < 2\pi), \qquad (1)$$

so ist

$$\sum_1^n {}^s |\lambda_s - \mu_s i| \leqq n \qquad (7)$$

und Gleichheit gilt nur für

$$\tau(t) = 1 + \frac{2n}{n+1}\cos(\vartheta + t) + \cdots + \frac{2\cdot 1}{n+1}\cos n(\vartheta + t)$$
$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}(\vartheta+t)}{\sin\frac{\vartheta+t}{2}}\right]^2, \tag{8}$$

wo ϑ beliebig ist.

Hierin ist ein Satz des Herrn Fejér enthalten[1]), wonach $\tau(\vartheta) \leqq n + 1$ ist, und Gleichheit nur im Falle (8) gilt.

Aus (7) folgt insbesondere

$$\left|1 + \sum_1^n {}^s c_s z^s\right| \leqq n + 1 \text{ für } |z| \leqq 1.$$

Es sei jetzt

$$\tau(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

ein beliebiges trigonometrisches Polynom höchstens n-ter Ordnung, dessen konstantes Glied gleich Null ist. Es sei M sein Maximum und $-m$ sein Minimum; M und m sind positive Zahlen und geben die höchste „Steigung" bzw. die tiefste „Senkung" von $\tau(t)$ an.

Offenbar genügt das trigonometrische Polynom

$$\frac{\tau(t)+m}{m} = 1 + \frac{a_1}{m}\cos t + \cdots + \frac{b_n}{m}\sin nt$$

der Bedingung (1); also ist nach Satz II

$$\sum_1^n {}^s |a_s - b_s i| \leqq n \cdot m,$$

und Gleichheit gilt nur für

$$a_s - b_s i = 2m\frac{n-s+1}{n+1}e^{s\vartheta i} \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1]) Fejér, a) a. a. O. S. 307, 1), § 3. — b) Sur les polynomes harmoniques quelconques [Comptes rendus de l'académie des sciences, Paris t. 157 (1913, II), p. 506—509]. — c) Sur les polynomes trigonometriques [Ibidem, t. 157, p. 571—574].

Ebenso führt die Betrachtung des trigonometrischen Polynoms $\frac{M - \tau(t)}{M}$ zu der Ungleichung

$$\sum_1^n {}^s |a_s - b_s i| \leqq n M,$$

und Gleichheit gilt nur für

$$a_s - b_s i = -2 M \frac{n - s + 1}{n + 1} e^{s \vartheta i} \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Es gilt also der

Satz III. Bezeichnen M und $-m$ das Maximum und Minimum eines beliebigen trigonometrischen Polynoms, dessen konstantes Glied gleich Null ist:

$$\tau(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos n t + b_n \sin n t,$$

so ist

$$\frac{1}{n} \sum_1^n {}^s |a_s - b_s i| \leqq m, \quad \frac{1}{n} \sum_1^n {}^s |a_s - b_s i| \leqq M,$$

und das Gleichheitszeichen ist in einer dieser Ungleichungen nur für

$$T_1(t) = \frac{2 m}{n + 1} \sum_1^n {}^s (n - s + 1) \cos s (\vartheta + t)$$

$$= \frac{m}{n+1} \left[\frac{\sin \frac{n+1}{2} (\vartheta + t)}{\sin \frac{\vartheta + t}{2}} \right]^2 - m$$

bzw.

$$T_2(t) = \frac{-2 M}{n + 1} \sum_1^n {}^s (n - s + 1) \cos s (\vartheta + t)$$

$$= -\frac{M}{n+1} \left[\frac{\sin \frac{n+1}{2} (\vartheta + t)}{\sin \frac{\vartheta + t}{2}} \right]^2 + M$$

gültig.

Auch dieser Satz ist die Verallgemeinerung eines Fejérschen Resultates[1]).

Man beachte, daß das trigonometrische Polynom (9) auch in der Form geschrieben werden kann:

$$T(t) = \sum_1^n {}^s |a_s - b_s i| \cos(st - t_s),$$

wo

$$\cos t_s = \frac{a_s}{\sqrt{a_s^2 + b_s^2}}, \quad \sin t_s = \frac{b_s}{\sqrt{a_s^2 + b_s^2}}.$$

$|a_s - b_s i| = \sqrt{a_s^2 + b_s^2}$ ist die Amplitude des Gliedes $|a_s - b_s i| \cos(st - t_s)$ oder auch des Binoms $a_s \cos st + b_s \sin st$ und wir können den Inhalt von Satz III auch so formulieren:

Die höchste Steigung und die tiefste Senkung des trigonometrischen Polynoms $\sum_1^n {}^s (a_s \cos st + b_s \sin st)$ ist mindestens so groß, wie das arithmetische Mittel der Amplituden der einzelnen Glieder.

Auf ähnlichem Wege findet man aus Ungl. (6) für $T(t)$ die Beziehungen:

$$\frac{1}{m}|a_\nu - b_\nu i| \leq 1, \quad \frac{1}{M}|a_\nu - b_\nu i| \leq 1 \text{ für } \nu > \left[\frac{n}{2}\right].$$

Also ist

$$|a_\nu - b_\nu i| \leq m, M \quad \left(\nu = \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \ldots, n\right),$$

und die Fälle, in denen Gleichheit gilt, lassen sich leicht bestimmen.

§ 3.

Aus (2) folgt

$$1 + \sum_1^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}^\nu |c_{2\nu}| \leq \sum_0^n {}^s |\gamma_s|^2 + 2 \sum_1^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}^\nu \sum_0^{n-2\nu} {}^s |\gamma_{2\nu+s} \gamma_s|. \qquad (10)$$

---

[1]) Fejér, a. a. O. S. 312, 1 c) und S. 307, 1), hier ist für Kosinuspolynome mit positiven Koeffizienten auch schon das arithmetische Mittel der Koeffizienten als untere Schranke für m angegeben.

Es sei zunächst n ungerade: $n = 2\varkappa + 1$; dann folgt aus (10)

$$1 + \sum_{1}^{\varkappa}{}^{\nu} |c_{2\nu}| \leqq \left(\sum_{0}^{\varkappa}{}^{s} |\gamma_{2s}|\right)^2 + \left(\sum_{0}^{\varkappa}{}^{s} |\gamma_{2s+1}|\right)^2$$

$$\leqq (\varkappa + 1) \sum_{0}^{\varkappa}{}^{s} |\gamma_{2s}|^2 + (\varkappa + 1) \sum_{0}^{\varkappa}{}^{s} |\gamma_{2s+1}|^2 \leqq \varkappa + 1.$$

Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn

1) $|\gamma_0| = |\gamma_2| = \cdots = |\gamma_{2\varkappa}|$,
2) $|\gamma_1| = |\gamma_3| = \cdots = |\gamma_{2\varkappa+1}|$,
3) $\vartheta_{2\nu+s} - \vartheta_s \equiv \vartheta_{2\nu}$ (mod. 2π) ($s = 0, \ldots, n - 2\nu$, $\nu = 1, \ldots, \varkappa$).

Hier ist $\gamma_s = \varrho_s e^{\vartheta_s i}$; sei nun 1) und 2) entsprechend

$$\gamma_{2s} = \xi e^{\vartheta_{2s} i}, \quad \gamma_{2s+1} = \eta e^{\vartheta_{2s+1} i} \quad (s = 0, 1, \ldots, \varkappa),$$

ferner gemäß 3)

$$\vartheta_{s+2} = \vartheta_s + \vartheta_2 \quad (s = 0, 1, \ldots, n - 2),$$

also

$$\vartheta_4 = 2\vartheta_2, \ \vartheta_6 = 3\vartheta_2, \ \ldots, \ \vartheta_{2\varkappa} = \varkappa\vartheta_2,$$
$$\vartheta_3 = \vartheta_1 + \vartheta_2, \ \vartheta_5 = \vartheta_1 + 2\vartheta_2, \ \ldots, \ \vartheta_{2\varkappa+1} = \vartheta_1 + \varkappa\vartheta_2,$$

dann sind die Bedingungen 1)—3) auch sämtlich befriedigt, und man erhält

$$\sum_{0}^{2\varkappa+1}{}^{s} \gamma_s z^s = \xi \sum_{0}^{\varkappa}{}^{s} e^{s\vartheta_2 i} z^{2s} + \eta \sum_{0}^{\varkappa}{}^{s} e^{\vartheta_1 + s\vartheta_2 i} z^{2s+1}$$
$$= \left(\sum_{0}^{\varkappa}{}^{s} e^{s\vartheta_2 i} z^{2s}\right)(\xi + \eta e^{\vartheta_1} z), \tag{11}$$

wobei $(\varkappa + 1)(\xi^2 + \eta^2) = c_0 = 1$. Hieraus folgt

$$\left|\sum_{0}^{2\varkappa+1}{}^{s} \gamma_s z^s\right|^2 = \left|\sum_{0}^{\varkappa}{}^{s} e^{s\vartheta_2 i} z^{2s}\right|^2_{z=e^{ti}} \left|\xi + \eta e^{\vartheta_1 i} z\right|^2_{z=e^{ti}}$$

$$= (\varkappa + 1 + 2\varkappa\cos(\vartheta_2 + 2t) + \cdots + 2\cdot\cos\varkappa(\vartheta_2 + 2t)]$$
$$\left[\frac{1}{\varkappa + 1} + 2\xi\eta\cos(\vartheta_1 + t)\right].$$

Setzt man noch

$$\xi \sqrt{\varkappa + 1} = \cos\frac{\delta}{2}, \quad \eta \sqrt{\varkappa + 1} = \sin\frac{\delta}{2}, \quad \vartheta_2 = 2\vartheta,$$

so wird schließlich

$$\left|\sum_0^{2\varkappa+1}{}^s \gamma_s z^s\right|^2_{z=e^{ti}} = \frac{1}{\varkappa+1}\left[\frac{\sin(\varkappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)}\right]^2 \qquad (12)$$
$$[1 + \sin\delta\cdot\cos(\vartheta_1 + t)].$$

Sei nun n gerade also $n = 2\varkappa$, und

$$\Re \sum_0^{2\varkappa}{}^s c_s e^{sti} \geqq 0, \quad 0 \leqq t < 2\pi;$$

setzt man

$$c_{2\varkappa+1} = 0,$$

so ist $\Re \sum_0^{2\varkappa+1}{}^s c_s e^{sti} \geqq 0$, und nach unserem obigen Resultat

$$\sum_0^{\varkappa}{}^\nu |c_{2\nu}| \leqq \varkappa + 1,$$

und damit Gleichheit gilt, muß unser trigonometrisches Polynom von der Form (12) und $c_{2\varkappa+1} = \gamma_{2\varkappa+1}\bar{\gamma}_0 = 0$ sein. Also muß nach (11) $\eta = 0$ sein, und man erhält

$$\tau(t) = \frac{1}{\varkappa+1}\left[\frac{\sin(\varkappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)}\right]^2.$$

Zusammenfassend lautet unser Resultat:

Satz IV. Unter der Voraussetzung $1 + \sum_1^n{}^\nu (\lambda_\nu \cos\nu t - \mu_\nu \sin\nu t) \geqq 0$ für jedes t ist

$$\sum_1^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}^\nu |\lambda_{2\nu} - \mu_{2\nu} i| \leqq \left[\frac{n}{2}\right],$$

und Gleichheit gilt nur für

$$\tau(t) = \frac{1}{\varkappa+1}\left[\frac{\sin(\varkappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)}\right]^2 [1 + \sin\delta\cdot\cos(\vartheta_1 + t] \quad (n = 2\varkappa+1)$$

bzw. $$\tau(t) = \frac{1}{\varkappa+1}\left[\frac{\sin(\varkappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)}\right]^2 \quad (n = 2\varkappa),$$

hier sind ϑ, ϑ_1, δ beliebige Zahlen.

§ 4.

Aus (2) folgt unmittelbar

$$\sum_0^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}^{\nu} |c_{2\nu+1}| \leq 2 \sum_0^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}^{\nu} \sum_0^{n-2\nu-1}{}^{s} |\gamma_{2\nu+s+1}\gamma_s|;$$

setzt man zur Abkürzung

$$\left[\frac{n-1}{2}\right] = \varkappa_1, \quad \left[\frac{n}{2}\right] = \varkappa_2,$$

so erhält man hieraus

$$\begin{aligned}\sum_0^{\varkappa_1}{}^{\nu} |c_{2\nu+1}| &\leq 2(|\gamma_0| + |\gamma_2| + \cdots + |\gamma_{2\varkappa_2}|) \\ &\quad (|\gamma_1| + |\gamma_3| + \cdots + |\gamma_{2\varkappa_1+1}|) \\ &\leq 2\sqrt{(\varkappa_1+1)(\varkappa_2+1)} \left(\sum_0^{\varkappa_2}{}^{s} |\gamma_{2s}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_0^{\varkappa_1}{}^{s} |\gamma_{2s+1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{(\varkappa_2+1)(\varkappa_1+1)}.\end{aligned}$$

Zur Gleichheit sind offenbar folgende Bedingungen notwendig und auch hinreichend ($\gamma_s = \varrho_s e^{\vartheta_s i}$ gesetzt):

1) $\vartheta_{2\nu+s+1} - \vartheta_s \equiv \vartheta_{2\nu+1} \pmod{2\pi}$ $(s = 0, \ldots, n-2\nu-1,\ \nu = 0, \ldots, \varkappa_1)$,
2) $|\gamma_0| = |\gamma_2| = \cdots = |\gamma_{2\varkappa_2}|$,
3) $|\gamma_1| = |\gamma_3| = \cdots = |\gamma_{2\varkappa_1+1}|$,
4) $\sum_0^{\varkappa_2}{}^{s} |\gamma_{2s}|^2 = \sum_0^{\varkappa_1}{}^{s} |\gamma_{2s+1}|^2$.

Aus 1) folgt für $\nu = 0$:

$$\vartheta_{s+1} = \vartheta_s + \vartheta_1 \quad (s = 0, 1, \ldots, n-1),$$

also

$$\vartheta_2 = 2\vartheta_1,\ \vartheta_3 = 3\vartheta_1,\ \ldots,\ \vartheta_n = n\vartheta_1;$$

und die so bestimmten ϑ_s befriedigen die Bedingung 1).

Sei nun 2) und 3) entsprechend

$$\begin{aligned}\varrho_{2s} &= \xi \quad (s = 0, 1, \ldots, \varkappa_2) \\ \varrho_{2s+1} &= \eta \quad (s = 0, 1, \ldots, \varkappa_1);\end{aligned}$$

schließlich sei

$$(\varkappa_2 + 1)\,\xi^2 = (\varkappa_1 + 1)\,\eta^2,$$

dann sind die Bedingungen 1)—4) sämtlich erfüllt. — Es muß auch

$$(\varkappa_2 + 1)\,\xi^2 + (\varkappa_1 + 1)\,\eta^2 = c_0 = 1$$

sein. Man setze daher

$$\xi\sqrt{\varkappa_2 + 1} = \cos\frac{\delta}{2},\quad \eta\sqrt{\varkappa_1 + 1} = \sin\frac{\delta}{2};$$

jetzt wird, wenn man statt ϑ_1 einfach ϑ schreibt

$$\sum_0^n {}^s \gamma_s z^s = \frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sqrt{\varkappa_2+1}} \sum_0^{\varkappa_2} {}^s e^{2s\vartheta i} z^{2s} + \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sqrt{\varkappa_1+1}} \sum_0^{\varkappa_1} {}^s e^{(2s+1)\vartheta i} z^{2s+1}.$$

Ist n ungerade $n = 2\varkappa + 1$, so ist offenbar

$$\varkappa_1 = \varkappa,\quad \varkappa_2 = \varkappa,$$

und man erhält

$$\sum_0^{2\varkappa+1} {}^s \gamma_s z^s = \left(\frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sqrt{\varkappa+1}} + \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sqrt{\varkappa+1}} e^{\vartheta i} z\right)\left(\sum_0^{\varkappa} {}^s e^{2s\vartheta i} z^{2s}\right);$$

hieraus folgt

$$\left|\sum_0^{2\varkappa+1} {}^s \gamma_s z^s\right|^2_{z=e^{ti}} = \frac{1}{\varkappa+1}\left[\frac{\sin(\varkappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)}\right]^2 [1 + \sin\delta\cdot\cos(\vartheta+t)].$$

Ist n gerade $n = 2\varkappa$, so wird

$$\varkappa_1 = \varkappa - 1,\quad \varkappa_2 = \varkappa,$$

und aus (2)

$$c_{2\nu+1} = \frac{(\varkappa-\nu)\sin\delta}{\sqrt{\varkappa(\varkappa+1)}} e^{(2\nu+1)\vartheta i} (\nu = 0, 1, \ldots, \varkappa - 1)$$

$$c_{2\nu} = 2\,\xi^2(\varkappa - \nu + 1)\cdot e^{2\nu\vartheta i} + 2\,\eta^2(\varkappa - \nu)\,e^{2\nu\vartheta i}$$

$$= 2\,e^{2\nu\vartheta i}\left[(\varkappa - \nu + 1)\frac{\cos^2\frac{\delta}{2}}{\varkappa+1} + \frac{\varkappa-\nu}{\varkappa}\sin^2\frac{\delta}{2}\right],$$

also

$$\Re \sum_0^{2\varkappa}{}^{\nu} c_\nu e^{\nu t i} = 1 + \frac{\sin\delta}{\sqrt{\varkappa(\varkappa+1)}} \sum_0^{\varkappa-1}{}^{\nu} (\varkappa - \nu) \cos(2\nu+1)(\vartheta + t)$$

$$+ 2 \frac{\cos^2 \frac{\delta}{2}}{\varkappa+1} \sum_1^{\varkappa}{}^{\nu} (\varkappa - \nu + 1) \cos 2\nu(\vartheta + t)$$

$$+ 2 \frac{\sin^2 \frac{\delta}{2}}{\varkappa} \sum_1^{\varkappa}{}^{\nu} (\varkappa - \nu) \cos 2\nu(\vartheta + t);$$

wir können somit den Satz aussprechen:

Satz V. Unter der Voraussetzung $1 + \sum_1^n{}^{\nu} (\lambda_\nu \cos \nu t + \mu \sin \nu t) \geq 0$ für jedes t ist

$$\sum_0^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}^{\nu} |\lambda_{2\nu+1} - \mu_{2\nu+1} i| \leq \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \begin{cases} \varkappa + 1 & \text{für } n = 2\varkappa + 1 \\ \sqrt{\varkappa(\varkappa+1)} & \text{für } n = 2\varkappa, \end{cases}$$

und Gleichheit gilt nur für

$$\tau(t) = \frac{1}{\varkappa+1} \left[\frac{\sin(\varkappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)}\right]^2 [1 + \sin\delta \cdot \cos(\vartheta + t)]$$
$$(n = 2\varkappa + 1)$$

bzw.

$$\tau(t) = 1 + \frac{\sin\delta}{\sqrt{\varkappa(\varkappa+1)}} \sum_0^{\varkappa-1}{}^{\nu} (\varkappa - \nu) \cos(2\nu+1)(\vartheta + t)$$

$$+ 2 \frac{\cos^2 \frac{\delta}{2}}{\varkappa+1} \sum_1^{\varkappa}{}^{\nu} (\varkappa - \nu + 1) \cos 2\nu(\vartheta + t)$$

$$+ 2 \frac{\sin^2 \frac{\delta}{2}}{\varkappa} \sum_1^{\varkappa}{}^{\nu} (\varkappa - \nu) \cos 2\nu(\vartheta + t).$$

Hier sind ϑ und δ beliebig.

In ähnlicher Weise wie die Sätze I und II lassen sich auch die Sätze IV und V auf trigonometrische Polynome ohne konstantes Glied übertragen.

*

Der Satz V gestattet folgende Erweiterung:

Es seien α, β zwei positive Zahlen

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

dann ist offenbar

$$\alpha \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}^{\nu}\, c_{2\nu} + \beta \sum_{0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} {}^{\nu}\, c_{2\nu+1} \leqq \alpha \left[\frac{n}{2}\right] + \beta \left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)^{\frac{1}{2}},$$

und Gleichheit gilt nur für

$$\tau(t) = \frac{1}{\varkappa+1}\left[\frac{\sin(\varkappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)}\right]^2 [1+\sin\delta\cdot\cos(\vartheta+t)]$$

$$(n = 2\varkappa+1)$$

bzw.

$$\tau(t) = \frac{1}{\varkappa+1}\left[\frac{\sin(\varkappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)}\right]^2 \quad (n = 2\varkappa).$$

Es ist bemerkenswert, daß die extremen Fälle in den Sätzen II—V mit den arithmetischen Mitteln erster Ordnung der Partialsummen der Reihe

$$1 + 2\cos\vartheta + 2\cos 2\vartheta + \cdots$$

zusammenhängen, also mit

$$1 + \frac{2\nu}{\nu+1}\cos\vartheta + \frac{2(\nu-1)}{\nu+1}\cos 2\vartheta + \cdots + \frac{2\cdot 1}{\nu-1}\cos\nu\vartheta$$

$$= \frac{1}{\nu+1}\left[\frac{\sin(\nu+1)\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right]^2.$$

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1917
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)





Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

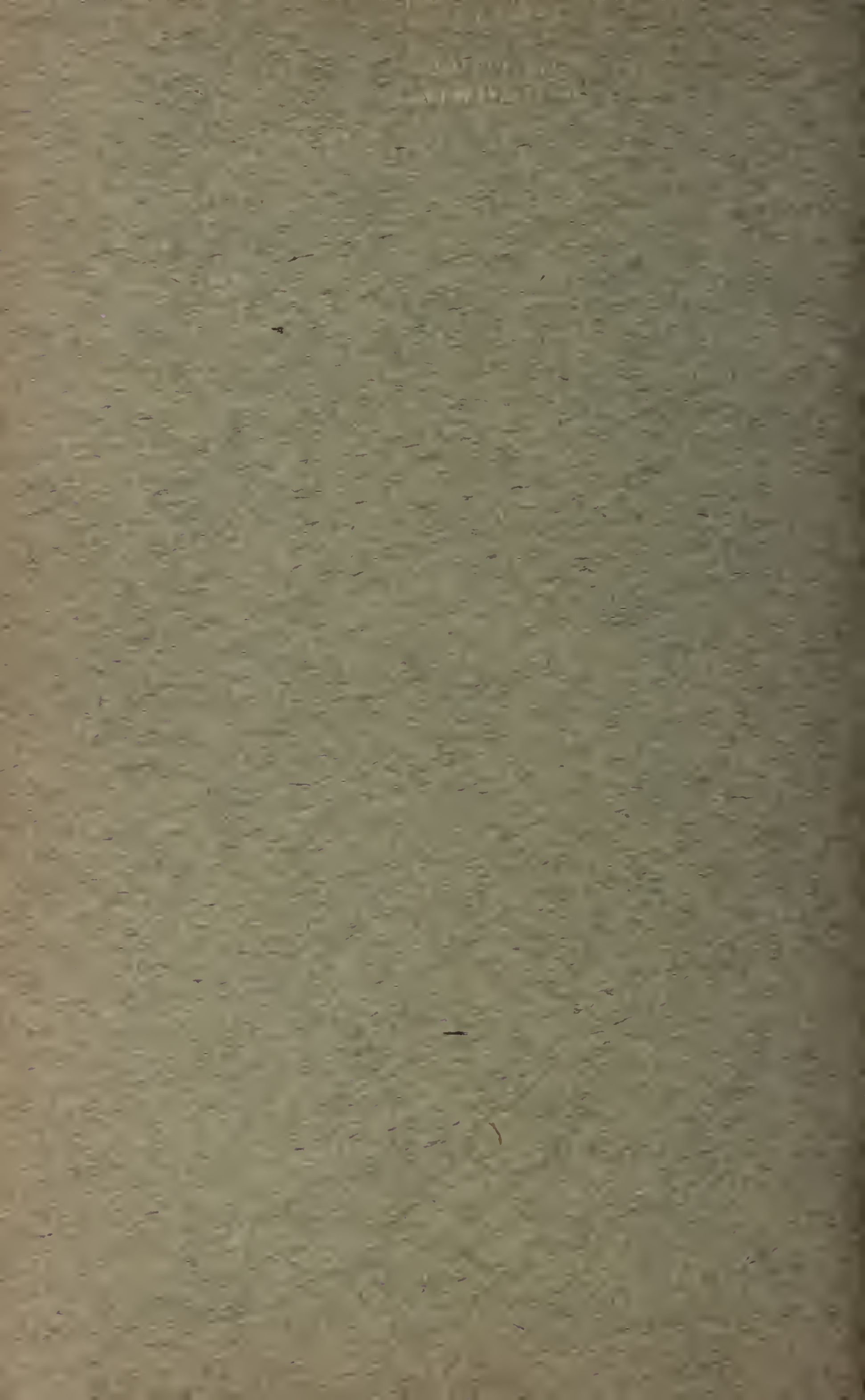
K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1917
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)





Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft III

Oktober- bis Dezembersitzung

München 1917
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)





Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.





